

# Utilisation de Pari/GP en dehors de la théorie des nombres

B. Perrin-Riou

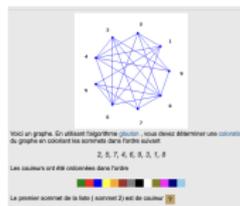
15 janvier 2025

- ▶ Utilisation des commandes "basiques" dans le logiciel WIMS depuis le départ (fin des années 90). C'était le choix du concepteur Xiao : inutile de refaire ce qui est très bien fait ailleurs. La licence de Pari est compatible avec cette utilisation.
- ▶ Par exemple, manipulation des matrices, utilisation de commandes comme binomial, matsnf, calcul du noyau d'une application linéaire, calcul de pgcd ...
- ▶ Historiquement, utilisation des commandes mélangées avec les scripts WIMS : `\text{blabla=pari(...)}`
- ▶ Plus récemment, tendance à faire des programmes pouvant être utilisés séparément ... modulo une documentation. Ils sont alors dans un répertoire séparé.

# Programmes sur les graphes

- ▶ construire un graphe eulérien
- ▶ trouver un cycle eulérien
- ▶ trouver la composante connexe
- ▶ algorithme de coloration (glouton, welsh) : dépend d'un ordre des sommets
- ▶ majoration du nombre chromatique

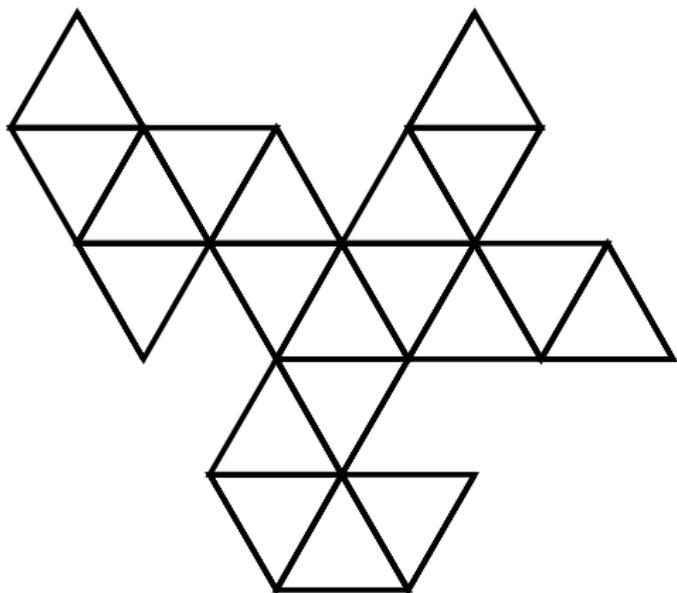
Fonctionne sur de petits graphes car le but est d'être utilisé dans des exercices, par exemple



## Patron d'un polyèdre convexe

Programmes faits par Dominique Bernardi.

Le polyèdre est donné par le graphe  $G$  associé aux faces du polyèdre. Un patron est alors associé à un arbre couvrant de ce graphe : les sommets sont les sommets de  $G$ , les arêtes forment un sous-ensemble de celles de  $G$  ... et c'est un arbre (connexe et acyclique).



Le polyèdre est donné par un fichier off (liste des coordonnées des sommets, liste des faces, liste des arêtes éventuellement)

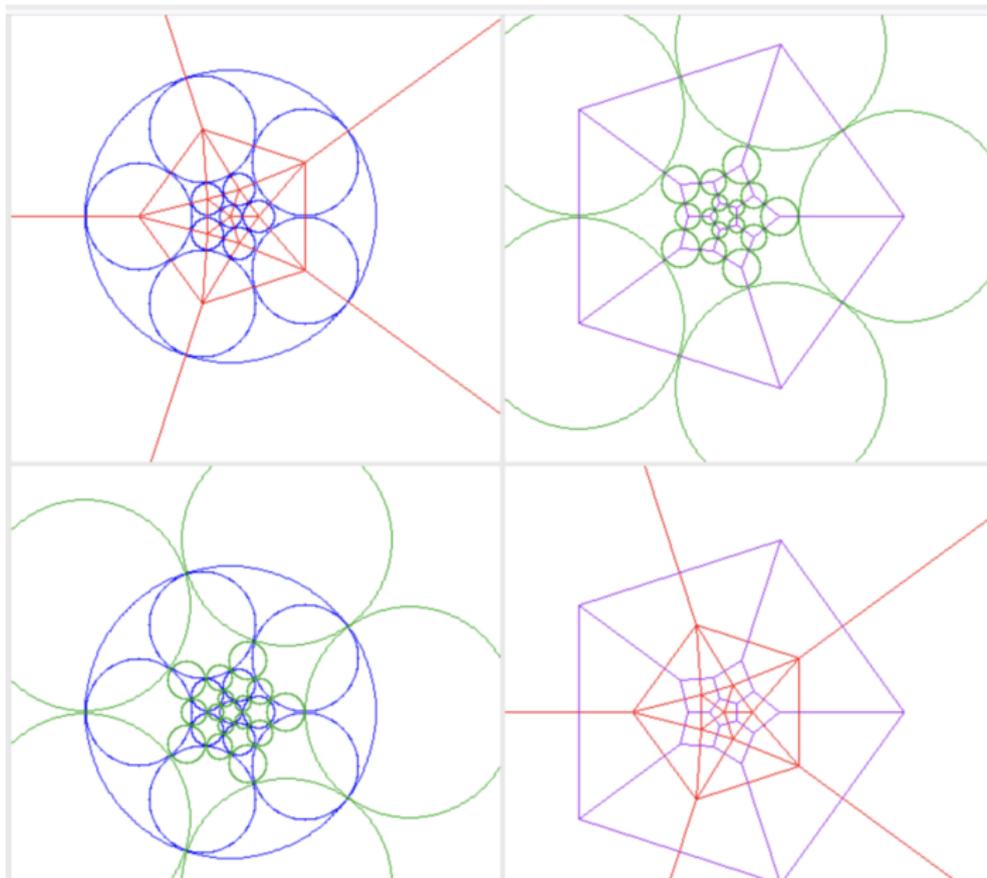
```
# Cube (Hexahedron)
# Data: Exact Mathematics
8 6 12
1 1 1
1 1 -1
1 -1 1
1 -1 -1
-1 1 1
-1 1 -1
-1 -1 1
-1 -1 -1
4 6 4 0 2
4 5 1 0 4
4 7 5 4 6
4 1 3 2 0
4 3 7 6 2
4 7 3 1 5
```



- ▶ Le programme GP calcule un arbre couvrant aléatoire de manière uniformément distribuée.
- ▶ On déploie, ce qui dépend d'un paramètre  $t$  entre 0 et 1. Pour  $t = 1$ , on a le polyèdre posé sur sa dernière face dans le plan  $xOy$ . Pour  $t = 0$ , on trouve le patron, dans le même plan.
- ▶ Le résultat est la liste des coordonnées 3D des sommets du déploiement.

★ WIMS ★ Détails

# Empilement de cercles associé à un polyèdre



## Empilement de cercles associé à un polyèdre

À chaque sommet du polyèdre est associé un cercle bleu. Les intersections des disques associés à deux tels cercles sont d'intérieur vide. Deux cercles bleus sont tangents si les deux sommets correspondants sont sur une même arête. En reliant les centres des cercles bleus, on obtient le graphe associé au polyèdre.

A chaque face du polyèdre est associé un cercle vert. Les intersections des disques associés à deux tels cercles sont d'intérieur vide. Deux cercles verts sont tangents si les deux faces correspondantes ont une arête commune. Cette configuration de cercles verts peut aussi être vue comme associée aux sommets et arêtes du polyèdre dual. Ainsi, le graphe violet est le graphe associé au polyèdre dual.

À chaque arête sont donc associés un couple de cercles bleus et un couple de cercles verts. Les points de tangence de chacun des couples sont les mêmes et les deux tangentes sont perpendiculaires.

## Empilement de cercles associé à un polyèdre

- ▶ Exploration de l'exposé de Ian Whitehead au cours du 18th Atelier PARI/GP 2023 à Marseille (Apollonian Packings and Generalizations).
- ▶ Implémentation de l'article : On Primal-Dual Circle Representations, Stefan Felsner, Günter Rote.

### Théorème

*Il existe un empilement de cercles sur la sphère associé à un polyèdre convexe. Il est unique à transformation de Moebius près.*

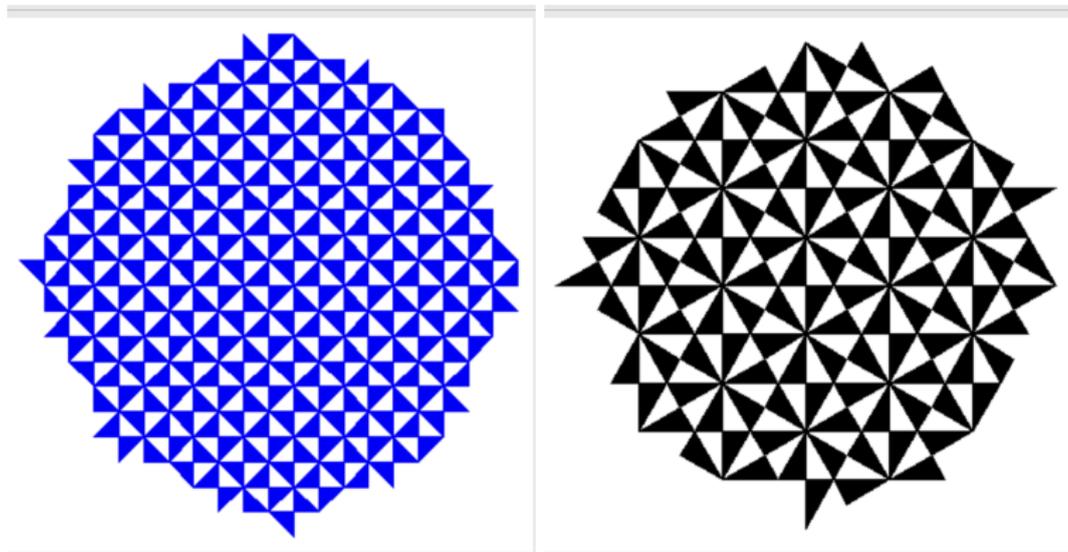
Le polyèdre est donné par un fichier off. Pour des raisons esthétiques, on choisit la représentation de la manière suivante :

- ▶ On cherche la face ou le sommet de plus grand degré ainsi que la face ou le sommet "le plus éloigné" possible.
- ▶ On les envoie sur le cercle unité et un cercle concentrique plus petit.

On renvoie les quatre listes (centres et rayons pour sommets et faces).

## Pavage du plan affine

Dessins de pavages du plan affine par des triangles.



## Pavage du plan affine

Il n'y a qu'un nombre fini de tels pavages : si les angles des triangles sont  $2\pi/d_i$  pour  $i = 1, 2, 3$  avec les  $d_i \geq 4$  pairs, on doit avoir  $\sum_i 1/d_i = 1/2$  ce qui donne un nombre fini de possibilités : [4, 8, 8], [6, 6, 6], [4, 6, 12].

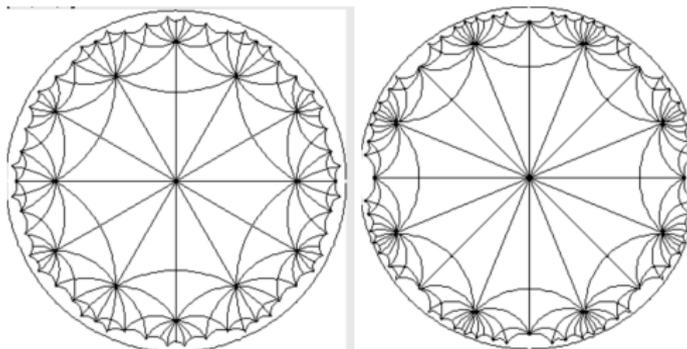
Lien avec les groupes de Coxeter...

Donc, un peu limité comme géométrie ...

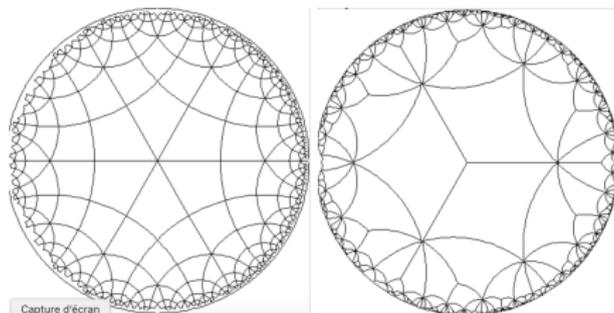
# Disque de Poincaré

## Pavage par des triangles

D'autres exemples★ (aller dans le lien D'autres groupes de symétrie)



## Pavage par des cerf-volants



## Pavage du disque de Poincaré

On a plus de possibilités car la condition sur les triangles est simplement que la somme des angles est strictement inférieure à  $\pi$  :

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{d_i} < \frac{1}{2}.$$

Le pavage par un triangle existe si les  $d_i$  sont tous pairs ou que deux des  $d_i$  sont égaux. Plus généralement, on peut regarder ce qui se passe pour un polygone à  $n$  côtés. Une condition nécessaire d'existence du polygone est que  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i} < \frac{n-2}{2}$ .

## Pavage du disque de Poincaré

- ▶ On se donne les sommets  $v_i$  du bord orienté d'un polygone convexe (tuile)  $P_0$  dont l'angle intérieur au point  $v_i$  est  $2\pi/d_i$ .
- ▶ Si deux côtés consécutifs sont inégaux, le  $d_i$  correspondant à l'angle entre eux est supposé pair.
- ▶ On renvoie sous forme de fichier off tous les pavés dont au moins un sommet est dans le disque euclidien de centre 0 et de rayon  $1 - \epsilon$ .
- ▶ Si  $\epsilon \geq 1$ , on s'en sert comme limite sur le nombre de pavés.

# Opérations croisées

## Génération de données pour un exercice ★

Compléter avec des entiers strictement positifs et inférieurs à 12 de manière à ce que les opérations des lignes et des colonnes soient justes

<input type="text"/>	+	<input type="text"/>	:	3	=	10
+	■	-	■	*	■	-
<input type="text"/>	-	12	:	4	=	<input type="text"/>
:	■	:	■	-	■	:
3	*	<input type="text"/>	-	10	=	<input type="text"/>
=	■	=	■	=	■	=
10	-	<input type="text"/>	:	<input type="text"/>	=	7

# Statistiques

Pari est utilisé dans certaines macros de statistiques :

- ▶ Utilisation des commandes gamma, random.
- ▶ Simulation d'un tirage uniforme selon les  $k$ -compositions d'un entier.

**Demande** : avoir des random "personnalisés", par exemple pour la simulation de réalisations d'une variable aléatoire

- ▶ suivant la loi de Weibull,
- ▶ suivant une loi de Student,
- ▶ suivant la loi de Poisson,
- ▶ suivant la loi de Pascal.

Actuellement, on est obligé d'utiliser Octave ...

Amusez-vous bien : ★ <https://wims.math.cnrs.fr/wims>