N^{O} d'ordre : 1903.

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Par **Nicolas BRISEBARRE**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

Une étude de deux problèmes diophantiens

Version soumise à examen auprès de

F. AMOROSO, Professeur	Università degli Studi di Torino
F. GRAMAIN, Professeur	Université Jean Monnet, Saint-Étienne

– 1998 –

Table des matières

Introduction

Cette thèse est composée de deux chapitres independants traitant de problèmes reliés à l'approximation diophantienne[1].

La première partie est un travail effectuée en collaboration avec Laurent Habsieger. Nous nous intéressons alors aux solutions holomorphes sur tout le plan complexe d'un système d'équations aux différences finies. J.-P. Bézivin et F. Gramain ont montré en 1996 que toute fonction f holomorphe sur tout le plan complexe solution du système

$$\begin{cases} \sum_{0\leq m\leq M} P_m(z)f(z+m\alpha)=0, \\ \sum_{0\leq n\leq N} Q_n(z)f(z+n\beta)=0, \end{cases}$$

où $(P_m)_{0\leq m\leq M}$ et $(Q_n)_{0\leq n\leq N}$ sont des suites finies de $\mathbb{C}[z]$ et α et β des nombres complexes tels que $\alpha/\beta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ est nécessairement de la forme $\sum_{s=1}^{S} a_s(z)e^{\delta_s z}$ avec $x_s \in \mathbb{C}(z)$ et $\delta_s \in \mathbb{C}$. Nous donnons une généralisation de ce résultat au cas $\alpha/\beta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Puis nous proposons une nouvelle approche de ce problème qui nous permet de retrouver partiellement les résultats de J.-P. Bézivin et F. Gramain. Enfin, nous fournissons un algorithme qui nous permet d'obtenir la forme explicite des solutions. Cet algorithme a été implanté dans un module écrit en Maple dont le lecteur trouvera une présentation dans l'appendice B.

La seconde partie de la thèse s'occupe d'approximations rationnelles des nombres transcendants $\log 2$ et $\pi/\sqrt{3}$. La qualité d'approximation d'un nombre réel par des nombres rationnels est mesurée à l'aide d'une constante réelle que l'on appelle mesure d'irrationalité. Nous étudions une classe de polynômes qui généralise les polynômes de Legendre. Cela nous permet d'unifier des travaux antérieurs d'E. A. Rukhadze, A. Dubitskas et M. Hata et d'infirmer une annonce faite par les frères Chudnovsky. De plus, nous introduisons une deuxième classe de polynômes dérivée de la première à l'aide de laquelle nous décrivons une tentative d'amélioration de la meilleure mesure d'irrationalité de $\log 2$ connue à ce jour.

[1]Diophante d'Alexandrie (200(?)-284(?)) est connu principalement pour son deuxième ouvrage "Arithmetica", recueil de problèmes conduisant notamment à la recherche de solutions rationnelles d'équations à coefficients entiers relatifs à une ou plusieurs inconnues.

Chapitre 1

Sur les fonctions entières à double pas récurrent

1.1 Introduction

L'origine du problème que nous allons traiter dans ce chapitre se trouve dans l'étude des fonctions entières arithmétiques. Nous la faisons débuter avec le théorème suivant dû à Pólya [Pól]. Rappelons au préalable qu'une fonction f : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est dite entière si elle est holomorphe sur tout le plan complexe $\mathbb{C}$.

Théorème (G. Pólya, 1915) .
Soit f une fonction entière telle que

$$f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z} \quad et \quad \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log |f|_r}{r} < \log 2$$

où $|f|_r = \sup_{|z| \leq r} |f(z)|$. Alors f est un polynôme.

Remarque 1.1. La constate $\log 2$ est optimale : il suffit de considérer la fonction $z \to 2^z$.

On peut trouver de nombreux travaux de Pólya, Hardy, Landau, Carlson et Pisot sur les fonctions entières telles que $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ ou $f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

En 1926, S. Fukasawa [Fuk] étudia les fonctions entières laissant stable l'anneau des entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i]$. Ses travaux ont été complétés par A. O. Gel'fond [Gel1] pour établir en 1929 le résultat suivant.

Théorème (S. Fukasawa, 1926 - A.O. Gel'fond, 1929) .
Il existe un réel $\alpha > 0$ tel que si f est une fonction entière vérifiant

$$f(\mathbb{Z}[i]) \subset \mathbb{Z}[i] \quad et \quad \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log |f|_r}{r^2} < \alpha.$$

Alors f est un polynôme.

En 1929, A. O. Gel'fond montrait que le théorème était vrai avec $\alpha = \pi(1 + e^{164/\pi})^{-2}/2 < 10^{-45}$. C'est seulement en 1979 que L. Gruman [Gru] améliorera cette constante en prouvant que le résultat reste vrai avec $\alpha = 0,0396$. D. Masser [Mas1] en 1980 établit de son côté la condition nécessaire $\alpha \leq \pi/(2e)$. Finalement, F. Gramain démontre en 1981 dans [Gra1] que la meilleure constante α possible vérifiant le théorème précédent vaut effectivement $\pi/(2e) = 0.57786....$ En fait, ce résultat est un cas particulier du théorème que nous énonçons à présent.

Théorème (F. Gramain, 1981) . *Soit K le corps quadratique de discriminant $-\Delta$, et $a = \sqrt{\Delta}/2$ l'aire d'un parallélogramme fondamental du réseau $\mathcal{O}_K$ des entiers de K.*
i) Si f est une fonction entière vérifiant

$$f(\mathcal{O}_K) \subset \mathcal{O}_K \text{ et } \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log|f|_r}{r^2} < \frac{\pi}{2ea},$$

alors f est un polynôme.
ii) Il existe une fonction entière f telle que

$$f(\mathcal{O}_K) \subset \mathcal{O}_K, \quad \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log|f|_r}{r^2} = \frac{\pi}{2ea},$$

et f n'est pas un polynôme.

Pour montrer son théorème, F. Gramain utilise en particulier le lemme suivant.

Lemme (F. Gramain, 1981) . *Soient α et β deux nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction, bornée sur tout compact, vérifiant les deux équations fonctionnelles*

$$\sum_{m=0}^{M} P_m(z) f(z + m\alpha) = \sum_{n=0}^{N} Q_n(z) f(z + n\beta) = 0 \tag{1.1}$$

où les P_m (resp. Q_n) sont des éléments non tous nuls de $\mathbb{C}[z]$ de degré majoré par D (resp. D'). Alors la croissance de f est limitée par

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log|f|_r}{r\log r} \leq \frac{D + D'}{r_0}$$

où r_0 est le diamètre du plus grand disque contenu dans le parallélogramme de sommets $0, \alpha, \beta$ et $\alpha + \beta$

Nous pouvons retrouver ce type de lemme dans d'autres travaux, traitant de fonctions entières envoyant des réseaux dans des réseaux (voir par exemple [GraMi]) et l'utilisation des relations fonctionnelles (1.1) satisfaites par f est toujours la même : elles permettent d'obtenir des résultats sur la croissance de f.

Nous introduisons maintenant deux définitions reliées aux équations (1.1).

Définition 1.2. *Soit f une fonction entière, soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, on dit que α est un pas récurrent pour la fonction f s'il existe $P_0, P_1, \ldots, P_M \in \mathbb{C}[z]$ tels que*

$$\sum_{m=0}^{M} P_m(z) f(z + m\alpha) = 0$$

ou, autrement dit, la fonction f vérifie une équation aux différences finies à coefficients polynomiaux dans la direction α.

Remarque 1.3. Le terme de pas récurrent est dû à D. Masser.

Définition 1.4. *Un polynôme exponentiel est une fonction entière de la forme $\sum_{k=1}^{K} H_k(z) e^{\delta_k z}$ avec $H_k \in \mathbb{C}[z]$ et $\delta_k \in \mathbb{C}$ pour tout k. Nous nommerons fréquences les nombres complexes δ_k.*

Remarque 1.5. Le lemme 2.5 de [BéGra1] nous dit qu'un polynôme exponentiel admet tout $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ comme pas récurrent (avec $P_m \in \mathbb{C}$ pour tout $m, 0 \leq m \leq M$).

Lors de l'exposé de son article [Gra1] à Oberwolfach, D.W. Masser posa à F. Gramain la question suivante (on peut en lire la formulation exacte dans [Mas2]).

Question (D. Masser) : Soit f une fonction entière, soient α et β deux nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$ tels que α et β soient des pas récurrents pour la fonction f. Cette fonction f est-elle nécessairement un polynôme exponentiel?

Autrement dit, D. Masser demande si les fonctions entières f solutions du système

$$\begin{cases} \sum_{0 \leq m \leq M} P_m(z) f(z + m\alpha) = 0, \\ \sum_{0 \leq n \leq N} Q_n(z) f(z + n\beta) = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

où $(P_m)_{0 \leq m \leq M}$ et $(Q_n)_{0 \leq n \leq N}$ sont des suites finies de $\mathbb{C}[z]$ et α et β des nombres complexes tels que $\alpha/\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ sont nécessairement des polynômes exponentiels.

Masser renforçait même ses hypothèses en demandant si une fonction entière admettant tout nombre complexe non nul comme pas récurrent était nécessairement un polynôme exponentiel.

La réponse à sa question est négative comme le montre le contre-exemple (exhibé dans [BéGra1]) de la fonction entière

$$f_0 : z \mapsto \frac{e^z - 1}{z}.$$

La fonction f_0 n'est pas un polynôme exponentiel (nous pouvons par exemple étudier son comportement à l'infini pour le voir) et vérifie pour tout α,

$$(z + 2\alpha) f_0(z + 2\alpha) - (1 + e^{\alpha})(z + \alpha) f_0(z + \alpha) + e^{\alpha} z f_0(z) = 0,$$

ce qui signifie qu'elle admet tout nombre complexe non nul comme pas récurrent. Cependant, nous constatons que la fonction f_0, si elle n'est pas un polynôme exponentiel, n'en est toutefois pas éloignée puisqu'elle est le quotient d'un polynôme exponentiel par un polynôme. La question naturelle qui se pose alors est de se demander si les contre-exemples à la question de D. Masser s'arrêtent à ce niveau d'obstruction. La réponse est oui comme J.-P. Bézivin et F. Gramain l'ont montré en plusieurs étapes dans [Gra2], [BéGra1] et [BéGra2]. La première pierre a été posée par F. Gramain qui, en 1991, a traité le cas où les coefficients du système sont constants.

Théorème (F. Gramain, 1991) . *Soit f une fonction entière solution du système* (1.2). *Si $\forall m, n$, nous avons $P_m, Q_n \in \mathbb{C}$, alors f est un polynôme exponentiel.*

La preuve se fait en deux temps. Tout d'abord, il montre, en utilisant le fait que les nombres complexes α et β forment une $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{C}$ (puisque $\alpha/\beta \notin \mathbb{R}$) que si f vérifie les deux équations aux différences finies du système (1.2), alors elle est nécessairement de type exponentiel. Rappelons qu'une fonction entière f est dite de type exponentiel s'il existe deux réels A, B strictement positifs tels que

$$|f(z)| \leq Ae^{B|z|} \text{ pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

F. Gramain établit donc un résultat sur la croissance de f et montre ensuite qu'une fonction entière de type exponentiel vérifiant une équation aux différences finies à coefficients constants est nécessairement un polynôme exponentiel.

Dans un premier article en commun [BéGra1], J.-P. Bézivin et F. Gramain donnaient deux nouvelles preuves du résultat précédent. Ils montraient aussi que si α/β appartient à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ et si les coefficients de l'une des deux équations sont constants, alors f est un polynôme exponentiel. De plus, ils prouvaient, en supposant toujours α/β appartenant à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, une série de résultats partiels. En particulier, s'inspirant d'un procédé dû à D. Zeilberger [Zei] qui consiste à créer des relations redondantes à partir de relations existant déjà, ils obtenaient une condition déterminantale sur les coefficients $(P_m)_{0\leq m\leq M}$ et $(Q_n)_{0\leq n\leq N}$. Cette condition, lorsqu'elle est vérifiée, entraîne que la fonction f est nécessairement un polynôme exponentiel. Elle est notamment vraie lorsque les coefficients P_0 et Q_0 du système (1.2) sont premiers entre eux. Énonçons ce dernier résultat.

Théorème (J.-P. Bézivin - F. Gramain, 1993) . *Soit f une solution entière solution du système* (1.2). *Si $P_m, Q_n \in \mathbb{C}[z]$ avec $(P_0, Q_0) = 1$, alors f est un polynôme exponentiel.*

Enfin, dans [BéGra2], ils résolvent complètement le problème en construisant un polynôme H tel que la fonction entière Hf satisfait un système du type (1.2) avec d'autres coefficients polynomiaux $(P_m^1)_{0\leq m\leq M_1}$ et $(Q_n^1)_{0\leq n\leq N_1}$ tels que $(P_0^1, Q_0^1) = 1$. Ils ont donc obtenu le résultat suivant.

Théorème (J.-P. Bézivin - F. Gramain, 1996) .
Soit f une fonction entière solution du système

$$\begin{cases} \sum_{0\leq m\leq M} P_m(z)f(z+m\alpha)=0, \\ \sum_{0\leq n\leq N} Q_n(z)f(z+n\beta)=0, \end{cases} \tag{1.3}$$

où $(P_m)_{0\leq m\leq M}$ et $(Q_n)_{0\leq n\leq N}$ sont des suites finies de $\mathbb{C}[z]$ et α et β tels que $\alpha/\beta\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Alors f est le quotient d'un polynôme exponentiel par un polynôme.

En fait, nous pouvons remplacer les deux membres de droite de (1.3) par des polynômes exponentiels. Il faut utiliser le fait, énoncé dans le Lemme 2.5 de [BéGra1], que pour tout nombre complexe α et pour tout polynôme exponentiel Φ, il existe une relation finie de dépendance linéaire sur $\mathbb{C}$ entre les translatées de Φ par α.

Le plan de ce premier chapitre est le suivant. Dans la prochaine partie, nous prolongeons le résultat de [Gra2] concernant les équations à coefficients constants au cas α/β appartenant à $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Cela permet d'étendre tous les énoncés de [BéGra2] au cas α/β appartenant à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$. Ensuite, nous proposons dans une troisième partie une nouvelle manière d'aborder la question de David Masser. Cela nous permet de prouver un critère qui implique la réponse attendue et de retrouver une partie des résultats de [BéGra2]. Enfin, notre dernière partie sera consacrée à la détermination algorithmique des solutions entières du système (1.3). Si l'on remplace, dans la deuxième équation de (1.3), les translatées de f par β par des dérivées de f, le Théorème 1.3 de [BéGra2] nous dit que la fonction entière f est encore le quotient d'un polynôme exponentiel par un polynôme. L'algorithme légèrement modifié permet encore de déterminer les solutions entières de ce système.

1.2 Cas où les deux équations sont à coefficients constants

Soient α,β des nombres complexes non nuls, soit f une fonction entière solution du système d'équations aux différences suivant

$$\begin{cases} \sum_{0\leq m\leq M} a_m f(z+m\alpha)=\Phi(z), \\ \sum_{0\leq n\leq N} b_n f(z+n\beta)=\Psi(z), \end{cases} \tag{1.4}$$

où $(a_m)_{0\leq m\leq M}$ et $(b_n)_{0\leq n\leq N}$ sont des suites de nombres complexes (avec $a_M b_N\neq 0$), les fonctions Φ et Ψ étant deux polynômes exponentiels. Dans [Gra2], on prouve que si α/β appartient à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, alors f est un polynôme exponentiel. Nous allons montrer dans le lemme suivant que l'on peut étendre ce résultat au cas $\alpha/\beta\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Lemme 1.6. *Si $\alpha/\beta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, alors toute solution entière de* (1.4) *est un polynôme exponentiel.*

Preuve. Nous pouvons nous restreindre au cas $\Phi = \Psi = 0$ puisque les nombres complexes α et β sont des pas récurrents pour tout polynôme exponentiel (cf. Remarque 1.5). Si la combinaison linéaire $\sum_{m=0}^{M} a_m f(\cdot + m\alpha) = 0$ est non triviale (i.e. $\mathrm{card}\{a_m \neq 0\} \geq 2$), alors

$$\mathrm{vect}_{\mathbb{C}}\big\{f(\cdot + m\alpha), m \in \mathbb{Z}\big\} = \mathrm{vect}_{\mathbb{C}}\{f(\cdot + m\alpha), 0 \leq m \leq M-1\big\},$$

où $\mathrm{vect}_{\mathbb{C}}\big\{f(\cdot + m\alpha), m \in \mathbb{Z}\big\}$ désigne l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{C}$ par la famille de fonctions $(f(\cdot + m\alpha))_{m\in\mathbb{Z}}$. De même, si $\sum_{n=0}^{N} b_n f(\cdot + n\beta) = 0$ est non triviale, nous avons

$$\mathrm{vect}_{\mathbb{C}}\big\{f(\cdot + n\beta), n \in \mathbb{Z}\big\} = \mathrm{vect}_{\mathbb{C}}\big\{f(\cdot + n\beta), 0 \leq n \leq N-1\big\}.$$

Si l'une des deux équations est triviale, nous avons nécessairement $f \equiv 0$. En écartant ce cas, nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned} V &:= \mathrm{vect}_{\mathbb{C}}\{f(\cdot + m\alpha + n\beta), m, n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \mathrm{vect}_{\mathbb{C}}\{f(\cdot + m\alpha + n\beta), 0 \leq m \leq M-1, 0 \leq n \leq N-1\}, \end{aligned}$$

ce qui montre que le $\mathbb{C}$-espace vectoriel V est de dimension finie. Comme α/β appartient à $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, le sous-groupe additif $\mathbb{Z}\alpha/\beta + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En particulier, il existe une suite $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta$ qui tend vers 0. Soit $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de V définie par

$$g_k = \frac{f(\cdot + h_k) - f}{h_k}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. Nous savons (cela peut se déduire du théorème de Taylor) que la suite $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers f' pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{C}$. L'espace V étant de dimension finie sur $\mathbb{C}$, toutes les normes définies sur V sont équivalentes : la suite $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge donc bien vers la fonction f' dans V. Une récurrence évidente donne l'appartenance de $f^{(i)}$ à V pour tout $i \in \mathbb{N}$. Nous en déduisons que la famille $(f, f', \ldots, f^{(\dim V)})$ est liée sur $\mathbb{C}$. La fonction f vérifie donc une équation différentielle à coefficients constants : la solution entière f est un polynôme exponentiel. □

Remarque 1.7. J.-J. Loeb [Loe] a montré que cette preuve s'adaptait aisément au cas des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. En effet, la convergence simple est en fait suffisante dans la preuve qui précède : il suffit d'utiliser le résultat classique qui suit.

Lemme 1.8. *Soit X un espace topologique. Soit $\mathcal{F}(X)$ l'espace des fonctions de l'ensemble X à valeurs dans K (K étant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Nous munissons $\mathcal{F}(X)$ de la topologie de la convergence simple. Alors tout sous-espace vectoriel E de dimension finie de $\mathcal{F}(X)$ est fermé pour cette topologie.*

La preuve de ce lemme se fait par récurrence sur la dimension de E. Un argument de densité lui permet ensuite de traiter le cas des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque 1.9. Tous les énoncés de [BéGra2] peuvent se prolonger au cas α/β appartenant à $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ puisque les preuves reposent toutes sur ce résultat initial et qu'elles n'exigent que l'irrationalité du quotient α/β.

Nous pouvons regrouper la Proposition 1 de [Gra2] et le Lemme 1.6 dans l'énoncé suivant.

Corollaire 1.10. *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ avec $\alpha/\beta \notin \mathbb{Q}$, et f une fonction entière solution du système*

$$\left\{ \begin{array}{c} \sum_{0\leq m\leq M} a_m f(z+m\alpha) = \Phi(z), \\ \sum_{0\leq n\leq N} b_n f(z+n\beta) = \Psi(z), \end{array} \right. \tag{1.5}$$

où $(a_m)_{0\leq m\leq M}$ et $(b_n)_{0\leq n\leq N}$ sont deux suites finies d'éléments de $\mathbb{C}$ avec $a_M b_N \neq 0$, et Φ et Ψ sont deux polynômes exponentiels. Alors f est un polynôme exponentiel.

Remarque 1.11. Nous nous sommes aperçus que le Corollaire 1.10 est en fait une conséquence directe d'un résultat de Gel'fond [Gel2] qui est en remarque p. 367 (à la suite de la preuve du Théorème VI p. 365). Cela dit, la preuve du théorème de Gel'fond requiert l'analyticité de la fonction f alors qu'une adaptation de notre preuve permet de traiter le cas des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (cf. Remarque 1.7). Nous pouvons énoncer le résultat comme suit.

Théorème 1.12. [Gel'fond] *Soit f une fonction entière solution des deux équations $L(f) = 0, L_1(f) = 0$, où L et L_1 sont des opérateurs normaux dont les fonctions caractéristiques respectives ϕ et ϕ_1 n'ont qu'un nombre fini de zéros communs, alors f est un polynôme exponentiel.*

Précisons la Remarque 1.11. Nous désignons par D l'opérateur de dérivation. Soit $T = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n D^n$ un opérateur différentiel d'ordre éventuellement infini, la fonction caractéristique de l'opérateur T est la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. On dit que l'opérateur est normal si sa fonction caractéristique est entière. Comme dans [BéGra1], nous notons $e^{\alpha D}$ et $e^{\beta D}$ les opérateurs différentiels d'ordre infini de translation par α et par β . Nous avons alors ici $L = P(e^{\alpha D})$ et $L_1 = Q(e^{\beta D})$, où $P(X) = \sum_{0\leq m\leq M} a_m X^m$ et $Q(Y) = \sum_{0\leq n\leq N} b_n Y^n$ sont les polynômes non nuls dont les coefficients complexes proviennent du système (1.5). Pour avoir le résultat énoncé, il suffit de remarquer que si l'on a $\alpha/\beta \notin \mathbb{Q}$, alors les fonctions caractéristiques $\phi(z) = P(e^{\alpha z})$ et $\phi_1(z) = Q(e^{\beta z})$ n'ont qu'un nombre fini de zéros communs.

1.3 Une autre approche de la question de D. Masser

Dans cette section, nous développons une nouvelle manière d'aborder le problème soulevé par D. Masser. Cette approche différente nous a amené à établir un critère qui nous permet notamment de traiter certains cas particuliers de notre problème.

1.3.1 Un lemme technique

Lemme 1.13. *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ avec $\alpha/\beta \notin \mathbb{Q}$, soient $A, B \in \mathbb{C}(z) \setminus \{0\}$ telles que*

$$\frac{A(z+\beta)}{A(z)} = \frac{B(z+\alpha)}{B(z)}. \tag{1.6}$$

Alors il existe $a, b \in \mathbb{C}, R \in \mathbb{C}(z)$ tels que

$$A(z) = a\frac{R(z+\alpha)}{R(z)}, \; B(z) = b\frac{R(z+\beta)}{R(z)}.$$

De plus, a et b sont uniques et R est unique à multiplication par un nombre complexe près.

Preuve. Quitte à normaliser, nous pouvons supposer $\alpha = 1$ et β irrationnel. Toutes les fractions rationnelles considérées dans la preuve sont à coefficients complexes. Pour toute fraction rationnelle U et toute classe c de $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$, on pose

$$N(c, U) = \mathrm{Card}\{z \in c \,|\, z \text{ zéro ou pôle de } U \text{ compté sans multiplicité}\}.$$

Nous allons tout d'abord montrer qu'il existe deux fractions rationnelles R et S telles que

$$A(z) = S(z)\frac{R(z+1)}{R(z)} \text{ et } \forall c \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}, \; N(c, S) \leq 1. \tag{1.7}$$

Soit Λ un système de représentants des classes de $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$. Il est clair que nous pouvons écrire A sous la forme

$$A(z) = c_A \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda(z),$$

où $c_A \in \mathbb{C}$ et $A_\lambda(z) = \prod_{m \in \mathbb{Z}} (z - \lambda - m)^{r_m^\lambda}$ avec les $r_m^\lambda \in \mathbb{Z}$ presque tous nuls. Pour l'étude de chaque A_λ, nous nous ramenons par translation de la variable au cas où $\lambda = 0$. Nous pouvons donc nous restreindre à l'étude des fractions de la forme

$$\mathcal{A}(z) = \prod_{m\in\mathbb{Z}} (z-m)^{r_m}$$

avec les r_m non tous nuls. Posons $\alpha = \sum_{m\in\mathbb{Z}} r_m$ ($\alpha \in \mathbb{Z}$). Il existe une fraction $\mathcal{R}$ telle que

$$\mathcal{A}(z) = z^\alpha \prod_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{z-m}{z}\right)^{r_m} = z^\alpha \frac{\mathcal{R}(z+1)}{\mathcal{R}(z)}.$$

En effet, pour tout m de $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{z-m}{z} &= \frac{(z-1)(z-2)\cdots(z-m)}{z(z-1)\cdots(z-m+1)} \text{ si } m \geq 1 \\ \text{et}\quad \frac{z-m}{z} &= \frac{(z+1)(z+2)\cdots(z-m)}{z(z+1)\cdots(z-m-1)} \text{ si } m \leq -1. \end{aligned}$$

Il existe donc une famille $(R_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de fractions rationnelles presque toutes égales à 1 telle que

$$A(z) = \prod_{\lambda\in\Lambda} (z-\lambda)^{\alpha_\lambda} \prod_{\lambda\in\Lambda} \frac{R_\lambda(z+1)}{R_\lambda(z)}.$$

Soient S et R les fractions rationnelles définies par

$$S(z) = \prod_{\lambda\in\Lambda} (z-\lambda)^{\alpha_\lambda} \quad \text{et} \quad R(z) = \prod_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda(z).$$

Nous avons bien la forme (1.7) désirée puisque, par construction de S, nous avons $N(c,S) \leq 1$ pour toute classe c de $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$.

Soit $V(z) = B(z)R(z)/R(z+\beta)$. L'égalité (1.6) entraîne la relation

$$\frac{S(z+\beta)}{S(z)} = \frac{V(z+1)}{V(z)}. \tag{1.8}$$

Supposons S non constante, i.e. non périodique, la fraction V ne peut pas alors être constante, en vertu de l'égalité précédente. Soit z_0 un zéro ou un pôle de V. L'ensemble des entiers relatifs h tels que $z_0 + h$ soit un zéro ou un pôle de $V(z+1)/V(z)$ est une partie finie non vide de $\mathbb{Z}$, qui admet un minimum et un maximum distincts. Ceci montre que $N(\overline{z_0}, V(z+1)/V(z)) \geq 2$. Nous avons donc, en utilisant (1.8),

$$N(\overline{z_0}, S(z+\beta)/S(z)) \geq 2. \tag{1.9}$$

Rappelons que $N(c,S) \leq 1$ pour toute classe c de $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$. Nous voyons facilement que

$$N(\overline{z_0}, S(z+\beta)) = N\left(\overline{z_0-\beta}, S(z)\right). \tag{1.10}$$

Si $N(\overline{z_0}, S(z)) = 0$, la relation (1.9) implique $N(\overline{z_0}, S(z+\beta)) \geq 2$ ce qui est absurde puisque $N(\overline{z_0}, S(z+\beta)) = N\left(\overline{z_0 - \beta}, S(z)\right) \leq 1$. De même, nous ne pouvons pas avoir $N\left(\overline{z_0}, S(z+\beta)\right) = 0$. Nous avons montré que

$$N(\overline{z_0}, S(z)) = N\left(\overline{z_0}, S(z+\beta)\right) = 1. \tag{1.11}$$

Les relations (1.10) et (1.11) entraînent l'égalité $N\left(\overline{z_0 - k\beta}, S(z)\right) = 1$ pour tout entier naturel k. Les classes $\left(\overline{z_0 - k\beta}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ étant disjointes (puisque β est irrationnel), la fraction S, qui n'est pas constante, admet donc une infinité de zéros ou de pôles. C'est impossible et nous en déduisons que S est une constante a. Nous avons alors la forme voulue pour A. L'égalité (1.8) nous dit que la fraction V est périodique de période 1 : elle ne peut être qu'une constante complexe b. L'unicité de a provient du fait que $a = \lim_{|z|\to\infty} A(z)$. Le même argument donne l'unicité de b. Quant à la fraction R, si nous supposons l'existence d'une autre fraction U convenable, nous obtenons en particulier l'égalité :

$$\frac{R(z+1)}{U(z+1)} = \frac{R(z)}{U(z)}.$$

Les seules fractions rationnelles périodiques étant les constantes, nous en déduisons qu'il existe μ dans $\mathbb{C}$ tel que $U = \mu R$. □

1.3.2 Énoncé et étude du Critère

Nous considérons un système de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{0\leq m\leq M} P_m(z) f(z+m\alpha) = 0, \\ \sum_{0\leq n\leq N} Q_n(z) f(z+n\beta) = 0, \end{array} \right. \tag{1.12}$$

où f est une fonction entière, α et β sont deux nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, et $(P_m)_{0\leq m\leq M}$ et $(Q_n)_{0\leq n\leq N}$ sont des suites finies d'éléments de $\mathbb{C}[z]$ avec $P_M Q_N \neq 0$.

Les deux équations du système (1.12) nous permettent d'exprimer la quantité $f(z+M\alpha+N\beta)$ de deux façons différentes. En effet, nous avons

$$f(z+N\beta+M\alpha) = \sum_{0\leq m\leq M-1} A_m(z+N\beta) f(z+m\alpha+N\beta)$$

et

$$f(z+M\alpha+N\beta) = \sum_{0\leq n\leq N-1} B_n(z+M\alpha) f(z+M\alpha+n\beta).$$

où $A_m = -P_m/P_M, 0 \leq m \leq M-1$ et $B_n = -Q_n/Q_N, 0 \leq n \leq N-1$. En utilisant à nouveau les données du système (1.12), nous obtenons la relation

$$\sum_{\substack{0 \leq m \leq M-1 \\ 0 \leq n \leq N-1}} \Big(A_m(z+N\beta)B_n(z+m\alpha) \\ - A_m(z+n\beta)B_n(z+M\alpha) \Big) f(z+m\alpha+n\beta) = 0.$$

Nous pouvons maintenant énoncer notre critère :

Critère 1.14. *Soit f une fonction entière solution du système*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{0 \leq m \leq M} P_m(z) f(z+m\alpha) = 0, \\ \sum_{0 \leq n \leq N} Q_n(z) f(z+n\beta) = 0, \end{array} \right. \tag{1.13}$$

où α et β sont deux nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et $(P_m)_{0 \leq m \leq M}$ et $(Q_n)_{0 \leq n \leq N}$ des suites finies d'éléments de $\mathbb{C}[z]$ avec $P_M Q_N \neq 0$.

Posons $A_m = -P_m/P_M, 0 \leq m \leq M-1$ et $B_n = -Q_n/Q_N, 0 \leq n \leq N-1$.

Si pour tout couple d'entiers naturels (m,n) tel que $0 \leq m \leq M-1$, $0 \leq n \leq N-1$, les fractions rationnelles

$$C_{m,n}(z) = A_m(z+N\beta)B_n(z+m\alpha) - A_m(z+n\beta)B_n(z+M\alpha)$$

sont nulles alors f est le quotient d'un polynôme exponentiel par un polynôme.

Preuve. Si les hypothèses du critère sont vérifiées, nous avons alors les relations

$$A_m(z+N\beta)B_n(z+m\alpha) = A_m(z+n\beta)B_n(z+M\alpha)$$

pour tout couple $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $0 \leq m \leq M-1$, $0 \leq n \leq N-1$. Le Lemme 1.13 nous dit que, pour tout couple d'entiers $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $0 \leq m \leq M-1$, $0 \leq n \leq N-1$, tel que $A_m B_n \neq 0$, il existe deux nombres complexes $a_{m,n}, b_{m,n}$ et une fraction rationnelle $R_{m,n}$ dans $\mathbb{C}(z)$ tels que

$$A_m(z) = a_{m,n} \frac{R_{m,n}(z+M\alpha)}{R_{m,n}(z+m\alpha)} \text{ et } B_n(z) = b_{m,n} \frac{R_{m,n}(z+N\beta)}{R_{m,n}(z+n\beta)}.$$

Ces égalités et l'argument d'unicité de la preuve du Lemme 1.13 permettent d'affirmer l'existence de deux suites finies $(a_m)_{0 \leq m \leq M-1}$ et $(b_n)_{0 \leq n \leq N-1}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ et d'une fraction rationnelle non nulle R de $\mathbb{C}(z)$ telles que

$$A_m(z) = a_m \frac{R(z+M\alpha)}{R(z+m\alpha)} \text{ et } B_n(z) = b_n \frac{R(z+N\beta)}{R(z+n\beta)}.$$

Nous avons donc transformé le système (1.12) de départ en le système suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(z+M\alpha) & = & \sum_{0\leq m\leq M-1} a_m \dfrac{R(z+M\alpha)}{R(z+m\alpha)} f(z+m\alpha), \\ f(z+N\beta) & = & \sum_{0\leq n\leq N-1} b_n \dfrac{R(z+N\beta)}{R(z+n\beta)} f(z+n\beta), \end{array}\right.$$

où R appartient à $\mathbb{C}(z)\backslash\{0\}$. Soit $g = f/R$; la fonction g est clairement méromorphe avec un nombre fini de pôles et vérifie le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} g(z+M\alpha) & = & \sum_{0\leq m\leq M-1} a_m g(z+m\alpha), \\ g(z+N\beta) & = & \sum_{0\leq n\leq N-1} b_n g(z+n\beta). \end{array}\right. \tag{1.14}$$

Il ne nous reste plus maintenant qu'à montrer que la fonction g est entière. Si l'ensemble des pôles de g n'est pas vide, il existe un pôle z_1 de $g(\cdot+M\alpha)$ qui n'est pôle d'aucun élément de la suite de fonctions $(g(\cdot+m\alpha))_{0\leq m\leq M-1}$: il suffit de considérer un nombre complexe z_1 qui réalise le minimum de $\mathrm{Re}(z/\alpha)$ parmi les pôles de $g(.+M\alpha)$. La contradiction vient alors du fait que z_1 est une singularité pour le premier membre de la première équation du système (1.14) et n'en est pas une pour le second membre. La fonction g est donc entière et elle est solution d'un système d'équations aux différences à coefficients constants. Le Corollaire 1.10 entraîne que g est un polynôme exponentiel et l'égalité $f = Rg$ nous permet de conclure. □

En fait, ce critère s'applique pour toute fonction f qui s'exprime comme quotient d'un polynôme exponentiel g par un polynôme P. Autrement dit, pour toute fonction entière f, il existe un système du type (1.13) dont les coefficients vérifient les hypothèses du critère. Le nombre complexe α étant un pas récurrent pour g, il existe $a_0, a_1, \ldots, a_M$ dans $\mathbb{C}$ tels que

$$\sum_{m=0}^{M} a_m g(z+m\alpha) = 0.$$

Nous posons alors $P_m(z) = a_m P(z+m\alpha)$ pour $m \in \mathbb{N}, 0 \leq m \leq M$. Nous avons donc la relation

$$\sum_{m=0}^{M} P_m(z) f(z+m\alpha) = 0.$$

De même, il existe $b_0, b_1, \ldots, b_N$ dans $\mathbb{C}$ tels que, si nous posons $Q_n(z) = b_n P(z+n\beta)$ pour $n \in \mathbb{N}, 0 \leq n \leq N$, nous ayons

$$\sum_{m=0}^{M} Q_n(z) f(z+n\beta) = 0.$$

Nous voyons alors facilement que les fractions rationnelles $C_{m,n}$ sont identiquement nulles.

Les hypothèses du critère sont évidemment satisfaites dans le cas où les deux équations sont à coefficients constants et elles le sont aussi lorsque M ou N vaut 1 (cf. la preuve du théorème 1.15). Initialement, nous pensions que, lorsque M et N étaient minimaux, les fractions rationnelles $C_{m,n}$ étaient toutes nulles. J.-P. Bézivin et F. Gramain nous ont fourni les contre-exemples $f(z) = (e^z - 1)/z + 1$ et $f(z) = e^z + z$.

1.3.3 Résultats partiels obtenus

Nous étudions quelques cas particuliers dans lesquels le critère s'applique.

Théorème 1.15. *Soient α, β deux nombres complexes non nuls tels que α/β appartient à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$, et soit f une fonction entière solution du système*

$$\left\{ \begin{array}{ll} P_1(z)f(z+\alpha) + P_0(z)f(z) & = \Phi, \\ \sum_{0\le n\le N} Q_n(z)f(z+n\beta) & = \Psi, \end{array} \right. \tag{1.15}$$

où $P_0, P_1, Q_0, \dots, Q_N$ sont dans $\mathbb{C}[z]$ avec $P_0P_1Q_0Q_N \neq 0$ et Φ et Ψ sont deux polynômes exponentiels. Alors

i) si Φ est nul, f est le quotient d'un polynôme exponentiel par un polynôme;

ii) si P_0 ou P_1 est constant, alors f est un polynôme exponentiel.

Preuve. Nous supposons f non identiquement nulle. Les mêmes calculs que ceux faits au début de cette section nous permettent de tirer du système (1.15) la relation

(1.16)
$$H(z) \sum_{0\le n\le N-1} (A(z+N\beta)B_n(z) - A(z+n\beta)B_n(z+\alpha))f(z+n\beta) = \Phi_1(z).$$

où H est un polynôme non nul et Φ_1 un polynôme exponentiel.

Supposons Φ nul. Il est toujours possible de supposer au départ Ψ nul car β est un pas récurrent pour le polynôme exponentiel Ψ – cf. Remarque 1.5 – puis N minimal, i.e.

$$N = \min \left\{ N_1 \in \mathbb{N} / \exists H_0, \dots, H_{N_1} \in \mathbb{C}[z], \right.$$
$$\left. H_{N_1} \neq 0 \quad \text{et} \sum_{0\le n_1\le N_1} H_{n_1}(z)f(z+n_1\beta) = 0 \right\}.$$

La fonction Φ_1 qui est une combinaison linéaire sur $\mathbb{C}[z]$ de translatées de Φ et de Ψ est par conséquent nulle. La minimalité de N entraîne que la relation (1.16) est triviale. Le Critère 1.14 s'applique et donne le résultat annoncé.

Nous traitons maintenant le deuxième point. Nous supposons N minimal :

$$N = \min \Big\{ N_1 \in \mathbb{N} / \, \exists \, H_0, \ldots, H_{N_1} \in \mathbb{C}[z], \exists \, \Theta \text{ un polynôme exponentiel,} \\ H_{N_1} \neq 0 \quad \text{et} \sum_{0 \leq n_1 \leq N_1} H_{n_1}(z) f(z + n_1 \beta) = \Theta(z) \Big\}.$$

La relation (1.16) et la minimalité de N impliquent que les fractions rationnelles A et $(B_n)_{0 \leq n \leq N-1}$ ont la forme donnée dans le Lemme 1.13 : il existe un nombre complexe a, une suite finie $(b_n)_{0 \leq n \leq N-1}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ et une fraction rationnelle non nulle R de $\mathbb{C}(z)$ tels que

$$A(z) = a \frac{R(z+\alpha)}{R(z)} \quad \text{et} \quad B_n(z) = b_n \frac{R(z + N\beta)}{R(z + n\beta)} .$$

Nous en déduisons en particulier que $\lim_{z \to \infty} A(z) = a$. La fraction A étant égale au rapport $-P_0/P_1$, les polynômes P_0 et P_1 ont même degré et sont donc simultanément constants : nous pouvons poser $R = 1$. Nous tirons alors de (1.15) le système

$$\text{(1.17)} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} f(z+\alpha) - af(z) & = & \lambda \Phi(z), \\ f(z + N\beta) - \sum_{0 \leq n \leq N-1} b_n f(z + n\beta) & = & \dfrac{\Psi(z)}{Q_N(z)}, \end{array} \right.$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}$. Nous voulons montrer que la fonction $\Psi(z)/Q_N(z)$ est en fait un polynôme exponentiel, ce qui entraînera le résultat escompté d'après le Corollaire 1.10. Pour cela, nous allons utiliser à nouveau le procédé initial : nous translatons les variables des deux équations du système et nous transformons les expressions ainsi obtenues, ce qui donne la relation suivante

$$\text{(1.18)} \qquad \lambda \Phi(z + N\beta) - \sum_{0 \leq n \leq N-1} b_n \lambda \Phi(z + n\beta) = \frac{\Psi(z+\alpha)}{Q_N(z+\alpha)} - a \frac{\Psi(z)}{Q_N(z)}.$$

Soit γ un nombre complexe et soient F, G les coefficients polynomiaux (éventuellement nuls) respectifs de $e^{\gamma \cdot}$ dans $\lambda\Phi$ et Ψ. La famille de fonctions $(e^{\delta \cdot})_{\delta \in \mathbb{C}}$ étant libre sur $\mathbb{C}(z)$ (cf. [Wal]), la relation (1.18) nous donne

(1.19)
$$F(z + N\beta) e^{\gamma N \beta} - \sum_{0 \leq n \leq N-1} b_n F(z + n\beta) e^{\gamma n \beta} = \frac{G(z+\alpha)}{Q_N(z+\alpha)} e^{\gamma \alpha} - a \frac{G(z)}{Q_N(z)}.$$

Posons $T = G/Q_N$. Nous allons montrer que la fraction rationnelle T est nécessairement un polynôme. En effet, si T n'est pas un polynôme, elle admet au moins un pôle z_0 qui n'est pas un pôle de $T(z+\alpha)$. Cela est absurde puisque le membre de gauche de l'équation (1.19) est une fonction entière. Nous avons donc prouvé que Q_N divise le coefficient polynomial de $e^{\gamma \cdot}$ dans Ψ, c'est-à-dire que Ψ/Q_N est bien un polynôme exponentiel. Les deux seconds membres du système (1.17) sont donc des polynômes exponentiels. Le Corollaire 1.10 nous dit alors que la fonction entière f solution de ce système est bien un polynôme exponentiel. □

Nous déduisons de ce théorème une nouvelle preuve du Théorème 5.1 de [BéGra1].

Corollaire 1.16. *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ avec $\alpha/\beta \notin \mathbb{Q}$, et f une fonction entière solution du système*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{0 \leq m \leq M} a_m f(z + m\alpha) = \Phi(z), \\ \sum_{0 \leq n \leq N} b_n(z) f(z + n\beta) = \Psi(z), \end{array} \right. \tag{1.20}$$

où $(a_m)_{0 \leq m \leq M}$ est une suite finie d'éléments de $\mathbb{C}$ et $(b_n)_{0 \leq n \leq N}$ une suite finie d'éléments de $\mathbb{C}[z]$ avec $a_M b_N \neq 0$, les fonctions Φ et Ψ étant deux polynômes exponentiels. Alors f est un polynôme exponentiel.

Preuve. Nous pouvons là encore nous placer dans le cas où $a_M b_N a_0 b_0 \neq 0$ et $\Phi = \Psi = 0$. Si $M = 1$, le Théorème 1.15 donne alors le résultat. Nous supposons donc $M \geq 2$ et la propriété vraie jusqu'au rang $M - 1$. Nous notons X l'opérateur de translation par α, Y l'opérateur de translation par β et Z l'opérateur de multiplication par z :

$$\begin{aligned} Xf &: z \mapsto f(z + \alpha), \\ Yf &: z \mapsto f(z + \beta), \\ Zf &: z \mapsto zf(z). \end{aligned}$$

Le fait que α/β soit irrationnel entraîne que X et Y sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}(Z)$ (cf. [BéGra1]). Nous écrivons alors le système (1.20) sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} P_M(X)f = 0, \\ R(Z, Y)f = 0, \end{array} \right. \tag{1.21}$$

avec $P_M \in \mathbb{C}[X]$ ($\deg P_M = M$), et $R(Z, Y) \in \mathbb{C}(Z)[Y]$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de P_M et P_{M-1} le polynôme en X de degré $M - 1$ défini par $P_M(X) = (X - \lambda)P_{M-1}(X)$. Introduisons la fonction entière

$$g = (X - \lambda)f = f(\cdot + \alpha) - \lambda f.$$

Comme l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{C}(z)$ par la famille de fonctions $(f(\cdot + m\alpha + n\beta))_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ est de dimension finie (grâce au système (1.21)), il existe un polynôme non nul $R_1(Z, Y)$ tel que g soit solution du système

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{M-1}(X)g = 0, \\ R_1(Z, Y)g = 0. \end{array} \right.$$

L'hypothèse de récurrence entraîne alors que $g = f(\cdot + \alpha) - \lambda f$ est un polynôme exponentiel, ce qui permet d'écrire un système de la forme

$$\begin{cases} f(z+\alpha) - \lambda f(z) &= \Phi_1(z), \\ \sum_{0\le n\le N} b_n(z) f(z+n\beta) &= \Psi(z), \end{cases}$$

où Φ_1 est un polynôme exponentiel. Il ne reste plus qu'à appliquer le Théorème 1.15. □

1.4 Détermination algorithmique des solutions entières

1.4.1 Cas des deux équations aux différences

Nous allons développer dans ce paragraphe un algorithme donnant la forme explicite des fonctions entières f solutions du système

$$\begin{cases} \sum_{0\le m\le M} P_m(z) f(z+m\alpha) = 0, \\ \sum_{0\le n\le N} Q_n(z) f(z+n\beta) = 0, \end{cases} \tag{1.22}$$

où $(P_m)_{0\le m\le M}$ et $(Q_n)_{0\le n\le N}$ sont deux suites finies d'éléments de $\mathbb{C}[z]$ avec $P_M Q_N \neq 0$ et $\alpha/\beta \notin \mathbb{Q}$. L'implantation en machine de cet algorithme n'est possible que pour le cas $\alpha/\beta \notin \mathbb{R}$ (nous verrons dans ce qui suit l'obstruction au traitement du cas $\alpha/\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). Quitte à normaliser, nous pouvons supposer $\alpha = 1$ et $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Nous cherchons donc f sous la forme

$$z \mapsto \sum_{s=1}^{S} x_s(z) e^{\delta_s z} \text{ avec } \delta_s \neq \delta_t \text{ si } s \neq t, \text{ et } x_s \in \mathbb{C}(z). \tag{1.23}$$

Notre première idée a été d'essayer d'utiliser l'algorithme Hyper de M. Petkovšek dont l'exposition constitue le chapitre 8 de [PWZ]. Nous expliquons sommairement son principe.

Soit F un corps de caractéristique nulle et K une extension de F. Nous supposons qu'il existe des algorithmes pour trouver des racines entières de polynômes à coefficients dans K et pour factoriser des polynômes à coefficients dans K sous forme de produits de facteurs irréductibles sur K.

Considérons l'équation aux différences

$$\sum_{0\le j\le J} P_j(n) f(n+j) = 0 \tag{1.24}$$

où les P_j sont des polynômes à coefficients dans F. L'algorithme Hyper nous permet de savoir si f peut s'écrire ou non sous la forme d'une combinaison linéaire sur K de termes $g(n)$ hypergéométriques sur K, i.e. de termes tels que

$$g(n+1)/g(n) \in K(n).$$

Or, si nous regardons notre solution entière f écrite sous la forme (1.23), nous constatons que f est la somme de termes hypergéométriques sur $\mathbb{C}$. En effet, pour tout $s, 1 \leq s \leq S$, nous avons

$$\frac{x_s(z+1)e^{\delta_s(z+1)}}{x_s(z)e^{\delta_s z}} = \frac{x_s(z+1)}{x_s(z)}e^{\delta_s} \in \mathbb{C}(z).$$

Bien entendu, nous n'avons pas d'algorithme pour trouver les racines exactes de polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$. Nous avons donc examiné Hyper en cherchant comment nous pourrions l'adapter à notre situation. Nous avons procédé comme suit.

Nous injectons f sous la forme (1.23) dans la première équation du système (1.22). Nous obtenons alors

$$\sum_{m=0}^{M} P_m(z) \left[\sum_{s=1}^{S} x_s(z+m)e^{\delta_s m}e^{\delta_s z} \right] = 0.$$

La famille de fonctions $\left(e^{\delta \cdot}\right)_{\delta \in \mathbb{C}}$ est libre sur $\mathbb{C}(z)$. Nous avons donc, pour tout $s \in \{1, \ldots, S\}$,

$$\sum_{m=0}^{M} P_m(z)x_s(z+m)e^{\delta_s m} = 0. \tag{1.25}$$

De même, nous obtenons pour tout $s \in \{1, \ldots, S\}$,

$$\sum_{n=0}^{N} Q_s(z)x_s(z+n\beta)e^{\delta_s n\beta} = 0. \tag{1.26}$$

Comparons maintenant les équations (1.24) et (1.25). Elles sont toutes deux à coefficients polynomiaux. La première ne comporte qu'une inconnue mais il s'agit d'une fonction hypergéométrique. La deuxième, quant à elle, comporte certes deux inconnues mais les objets recherchés, à savoir une fraction rationnelle x_s et une fréquence δ_s, sont bien moins généraux qu'une fonction hypergéométrique. Cela va nous permettre d'utiliser des algorithmes spécifiques qui seront plus efficaces qu'Hyper dans notre contexte. Nous allons tout d'abord exhiber les fréquences δ_s possibles. Puis, dans un deuxième temps, connaissant ces fréquences, nous chercherons les solution rationnelles x_s de l'équation (1.25). Enfin, une fois obtenues des solutions convenables sous la forme $z \mapsto x_s e^{\delta_s z}$, nous chercherons comment combiner ces solutions sur $\mathbb{C}$ pour obtenir une solution entière. Nous donnons maintenant le détail de ces trois étapes.

Étape 1 : Détermination des fréquences δ_s des exponentielles.

Posons

$$d = \max_{0 \le m \le M} \deg(P_m) \text{ et } e = \max_{0 \le n \le N} \deg(Q_n).$$

Soit $s \in \{1, \ldots, S\}$, la relation (1.25) est équivalente à l'équation

$$\sum_{m=0}^{M} \frac{P_m(z)}{z^d} \frac{x_s(z+m)}{x_s(z)} e^{\delta_s m} = 0.$$

En notant a_m le coefficient de z^d dans $P_m(z)$ et en faisant tendre z vers l'infini, nous obtenons

$$\sum_{m=0}^{M} a_m e^{\delta_s m} = 0$$

qui est une équation polynomiale en e^{δ_s}. De même, en notant b_n le coefficient de z^e dans $Q_n(z)$ et en faisant tendre z vers l'infini dans (1.26), nous obtenons

$$\sum_{n=0}^{N} b_n e^{\delta_s n \beta} = 0$$

qui est une équation polynomiale en $e^{\delta_s \beta}$. Nous résolvons donc les équations polynomiales en $X = e^{\delta_s}$ et $Y = e^{\delta_s \beta}$

$$\sum_{m=0}^{M} a_m X^m = 0 \text{ et } \sum_{n=0}^{N} b_n Y^n = 0.$$

Nous obtenons J ($\le M$) classes distinctes de solutions dans $\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}$ pour la première équation qu'il faut comparer aux L ($\le N$) classes distinctes de solutions dans $\mathbb{C}/2i\pi\beta^{-1}\mathbb{Z}$ pour la deuxième équation. La comparaison s'opère comme suit. Soient x_1 une racine du polynôme $P(X) = \sum_{m=0}^{M} a_m X^m$ et y_1 une racine du polynôme $Q(Y) = \sum_{n=0}^{N} b_n Y^n$. Nous associons à x_1 une fréquence δ qui est de la forme $\log x_1 + 2i\pi k_1$ et à y_1 une fréquence δ' qui est de la forme $(\log y_1 + 2i\pi k_2)/\beta$ où log désigne la détermination principale du logarithme complexe et où k_1, k_2 sont dans $\mathbb{Z}$. Il va donc s'agir de résoudre les équations en k et $k' \in \mathbb{Z}$

$$\log x + 2i\pi k = \frac{\log y + 2i\pi k'}{\beta},$$

x parcourant l'ensemble des racines de P et y l'ensemble des racines de Q. Ces équations sont équivalentes aux équations

$$k - \frac{k'}{\beta} = \frac{1}{2i\pi}\left(\frac{\log y}{\beta} - \log x\right). \tag{1.27}$$

Du fait de l'irrationalité de β, nous sommes assurés de trouver un nombre fini S_1 de fréquences complexes δ convenables. La résolution des équations (1.27) (donc la comparaison des classes) ne peut être faite avec un ordinateur que dans le cas où β n'est pas réel. En effet, si elle est facile dans le cas où β n'est pas dans $\mathbb{R}$ (il faut utiliser (1.27) et sa conjuguée), elle n'est pas possible si β est réel irrationnel : le sous-groupe $\mathbb{Z}+\beta\mathbb{Z}$ est alors dense dans $\mathbb{R}$ et il faudrait avoir une idée de la taille de k et k' pour pouvoir les déterminer, en utilisant l'algorithme LLL par exemple. Or, nous ne pouvons pas avoir un tel renseignement dans la situation étudiée ici.

La résolution des équations (1.27) nous permet d'exhiber, en cas d'existence de couples $(k,k')\in\mathbb{Z}^2$ solutions, un nombre fini de fréquences $\delta_1,\ldots,\delta_{S_1}$ de formes respectives $\log x_1 + 2i\pi k_1,\ldots,\log x_{S_1} + 2i\pi k_{S_1}$ et dans le cas contraire d'assurer que 0 est seule solution entière.

Étape 2 : Détermination des fractions rationnelles $x_s(z)$.

À ce stade, nous avons déterminé un nombre fini de fréquences $\delta_1,\ldots,\delta_{S_1}$ possibles. Nous utilisons tout d'abord un algorithme de S. Abramov [Abr] pour trouver un polynôme D que divise le dénominateur de chaque fraction x_s. L'algorithme original décrit dans [Abr] appliqué à notre contexte utilise des calculs de p.g.c.d. de polynômes à coefficients complexes ce qui dans l'objectif d'une implantation en machine n'a que peu de sens puisque les nombres ne sont représentés que par une approximation (considérer p.g.c.d.$(X+\zeta(2), X+\pi^2/6)$ par exemple). Nous avons donc été obligés d'adapter légérement l'algorithme et c'est cette adaptation que nous donnons maintenant. Le lecteur trouvera dans l'appendice A une preuve que l'algorithme donne bien le résultat souhaité.

Algorithme d'Abramov

1. [Initialisation] $D \leftarrow 1, Z \leftarrow \emptyset, A_1 \leftarrow P_M(z-M), A_2 \leftarrow P_0$.

2. $Z_1 \leftarrow$ liste des racines de A_1 comptées avec multiplicité,
   $n_1 \leftarrow$ nombre d'éléments de Z_1,
   $Z_2 \leftarrow$ liste des racines de A_2 comptées avec multiplicité,
   $n_2 \leftarrow$ nombre d'éléments de Z_2.

3. Pour $i = 1, ..., n_1$,
   $N_1 \leftarrow 0$,
   $t \leftarrow 0$,
   pour $j = 1, ..., n_2$,
   $N_2 \leftarrow Z_2[j] - Z_1[i]$ ($Z_2[j]$ désignant le j-ième élément de Z_2 et $Z_1[i]$ le i-ième élément de Z_1),
   si $N_2 \in \mathbb{N}$ alors
   si $t = 0$ ou $N_2 < N_1$ alors
   $t \leftarrow j$,

$N_1 \leftarrow N_2$.
si $t > 0$ alors
$D \leftarrow D \prod_{k=0\ldots N_1}(z-k-Z_1[i])$,
$Z \leftarrow Z$ augmentée de $\{Z_1[i]+k\}_{0\leq k\leq N_1}$,
$Z_2 \leftarrow Z_2$ privée de $Z_2[t]$,
$n_2 \leftarrow n_2 - 1$.

4. [Sortie] D (le polynôme recherché),
Z (liste des racines de D comptées avec multiplicité).

Ensuite, nous déterminons, grâce à l'algorithme Poly de M. Petkovšek [PWZ], toutes les solutions polynomiales $y_s(z)$ de l'équation

$$\sum_{m=0}^{M} \frac{P_m(z)}{D(z+m)} y_s(z+m)e^{\delta_s m} = 0. \tag{1.28}$$

Avant de donner l'algorithme Poly, nous disons comment se termine cette étape. Soit $y_s(z)$ un polynôme solution de l'équation (1.28), posons $x_s(z) = y_s(z)/D(z)$. Nous vérifions alors si $x_s(z)e^{\delta_s z}$ est bien solution de la deuxième équation de (1.22).

Nous présentons maintenant brièvement Poly.

Soit F un corps de caractéristique nulle et K une extension de F. Poly permet d'obtenir toutes les solutions polynomiales $y \in K[z]$ de l'équation

$$\sum_{0\leq m\leq M} G_m(z)y(z+m) = 0 \tag{1.29}$$

où $(G_m)_{0\leq m\leq M}$ est une suite finie d'éléments de $F[z]$. Soit G un polynôme à coefficients dans F, nous noterons $\mathrm{cd}(G)$ son coefficient dominant et la notation $z^{\underline{j}}$ désignera le produit $z(z-1)\ldots(z-j+1)$.

Nous énonçons maintenant l'algorithme (le lecteur trouvera un justificatif théorique dans l'appendice A).

Algorithme Poly

1. Pour $j = 0, ..., M$, $H_j \leftarrow \sum_{m=j}^{M} \binom{m}{j} G_m$.

2. $b \leftarrow \max_{0\leq j\leq M}(\deg H_j - j)$

$$\alpha(z) \leftarrow \sum_{\substack{0\leq j\leq M \\ \deg H_j - j = b}} \mathrm{cd}(H_j) z^{\underline{j}}$$

$d_1 \leftarrow \max\{z \in \mathbb{N}, \alpha(z) = 0\}$
$d \leftarrow \max\{-b-1, d_1\}$

3. Injecter $y(z) = \sum_{i=0}^{d} a_i z^i$ dans l'équation (1.29).
   Résoudre le système linéaire en les a_i.

4. [Sortie] Une famille génératrice de l'ensemble des solutions.

Étape 3 : Étant données $x_1(z)e^{\delta_1 z}, \ldots, x_S(z)e^{\delta_S z}$ les S solutions méromorphes déterminées à l'aide des deux étapes précédentes, nous devons trouver les coefficients complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_S$ tels que la fonction

$$z \mapsto f_{\lambda_1,\ldots,\lambda_S}(z) = \sum_{s=1}^{S} \lambda_s x_s(z) e^{\delta_s z}$$

soit entière.

Nous disposons depuis l'étape 2 d'un dénominateur D commun aux $x_s(z)$. Cela signifie que l'ensemble des pôles de $f_{\lambda_1,\ldots,\lambda_S}$ comptés avec multiplicité est inclus dans l'ensemble des racines de D comptées avec multiplicité. Nous connaissons, par construction de D, ses racines et leurs ordres de multiplicité.

Il s'agit à cet endroit de trouver les λ_s pour lesquels les racines de D sont aussi racines (comptées avec multiplicité) du polynôme exponentiel

$$g_{\lambda_1,\ldots,\lambda_S}(z) = \sum_{s=1}^{S} \lambda_s D(z) x_s(z) e^{\delta_s z}.$$

Si nous notons $z_1, z_2, \ldots, z_r$ les racines de D d'ordres respectifs $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$, les coefficients λ_s seront les solutions du système linéaire formé par les équations

$$g^{(l_j)}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_S}(z_j) = 0,\ 1 \leq j \leq r,\ 0 \leq l_j \leq \mu_j - 1.$$

Maintenant que nous avons détaillé les trois différentes étapes, nous pouvons donner l'algorithme sous une forme synthétique.

1.4.1.1 Énoncé de l'algorithme Pasrec

Nous supposons que β appartient à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ et nous donnerons en remarque l'amélioration (indispensable à l'implantation en machine) que nous avons quand β appartient à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

1. [Détermination des fréquences]

   (a) $s \leftarrow 0, s_1 \leftarrow 0,\ d \leftarrow \max_{0 \leq m \leq M} \deg P_m,\ e \leftarrow \max_{0 \leq n \leq N} \deg Q_n$,
   $a_m \leftarrow$ coefficient de z^d dans $P_m(z)$,
   $b_n \leftarrow$ coefficient de z^e dans $Q_n(z)$.

(b) Résoudre $\sum_{0\leq m\leq M} a_m X^m = 0 \Rightarrow J$ racines distinctes $x_1, \ldots, x_J$.
Résoudre $\sum_{0\leq n\leq N} b_n Y^n = 0 \Rightarrow L$ racines distinctes $y_1, \ldots, y_L$.
Pour $j = 1, \ldots, J$, pour $l = 1, \ldots, L$,
Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$

$$k_{j,l} - k'_{l,j}/\beta = (\log y_l/\beta - \log x_j)/(2i\pi).$$

S'il existe $(k_{j,l}, k'_{l,j}) \in \mathbb{Z}^2$ solution, alors
$s_1 \leftarrow s_1 + 1$,
$\delta_{s_1} \leftarrow \log x_j + 2ik_{j,l}\pi$.
$S_1 \leftarrow s_1$.
Si $S_1 = 0$, alors il n'y pas de solution entière autre que 0
sinon la liste des fréquences admissibles est $[\delta_1, \ldots, \delta_{S_1}]$.

2. [Détermination des fractions rationnelles]

(a) $D \leftarrow$ dénominateur commun donné par l'algorithme d'Abramov ,
$Z \leftarrow$ liste des racines de D comptées avec multiplicité.

(b) Pour $j = 1, \ldots, S_1$,
$y_j \leftarrow$ polynôme solution (fourni par Poly) de l'équation

$$\sum_{m=0}^{M} \frac{P_m(z)e^{\delta_j m}}{D(z+m)} y_j(z+m) = 0.$$

Si $y_j \neq 0$ et $\sum_{n=0}^{N} \dfrac{Q_n(z)e^{\delta_j n\beta}}{D(z+m\beta)} y_j(z+m\beta) = 0$ alors
$s \leftarrow s+1, \quad x_s \leftarrow y_j/D$.
$S \leftarrow s$.
Si $S = 0$ alors il n'y pas de solution entière autre que 0
sinon la liste des "monômes" admissibles est $\left[x_1(z)e^{\delta_1 z}, \ldots, x_S(z)e^{\delta_S z}\right]$.

3. [Détermination de la combinaison linéaire rendant la fonction entière]
Résoudre le système linéaire en les inconnues $\lambda_s \in \mathbb{C}$ d'équations

$$\left(z \mapsto \sum_{s=1}^{S} \lambda_s D(z) x_s(z) e^{\delta_s z}\right)^{(l_j)} (z_j) = 0,\ 1 \leq j \leq r,\ 0 \leq l_j \leq \mu_j - 1,$$

avec $z_1, z_2, \ldots, z_r$ racines de D d'ordres respectifs $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$.

4. [Sortie] Une famille génératrice de l'ensemble des solutions entières.

Remarque 1.17. Lorsque β appartient à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, nous pouvons remplacer dans l'étape 1. de détermination des fréquences le passage

Pour $j = 1, \ldots, J$, pour $l = 1, \ldots, L$,
Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$

$$k_{j,l} - k'_{l,j}/\beta = (\log y_l/\beta - \log x_j)/(2i\pi).$$

S'il existe $(k_{j,l}, k'_{l,j}) \in \mathbb{Z}^2$ solution, alors
$s_1 \leftarrow s_1 + 1,$
$\delta_{s_1} \leftarrow \log x_j + 2ik_{j,l}\pi.$

par

Pour $j = 1, \ldots, J$, pour $l = 1, \ldots, L$,
$k_{j,l} \leftarrow \mathrm{Re}(\beta \log x_j - \log y_l)/\big(2\pi \mathrm{Im}(\beta)\big),$
$k'_{l,j} \leftarrow \mathrm{Re}(\log y_l/\beta - \log x_j)/\big(2\pi \mathrm{Im}(1/\beta)\big),$
si $(k_{j,l}, k'_{l,j}) \in \mathbb{Z}^2$, alors
$s_1 \leftarrow s_1 + 1,$
$\delta_{s_1} \leftarrow \log x_j + 2ik_{j,l}\pi.$

1.4.1.2 Un exemple de fonctionnement de l'algorithme

Nous nous proposons de faire tourner notre algorithme sur l'exemple simple suivant.

Soit f une fonction entière solution du système

$$\text{(1.30)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \left(z^2 + \left(2+\sqrt{2}\right)z + 2\sqrt{2}\right) f(z+2) \\ \qquad -(1+e)\left(z^2 + \left(1+\sqrt{2}\right)z + \sqrt{2}\right) f(z+1) \\ \qquad\qquad +e\left(z^2 + \sqrt{2}z\right) f(z) = 0, \\ \\ 3(z+3i)f(z+3i) - \left(2+3e^{i-4\pi}\right)(z+2i)f(z+2i) \\ \qquad + \left(2e^{i-4\pi} - 1\right)(z+i)f(z+i) + e^{i-4\pi} z f(z) = 0. \end{array} \right.$$

La fonction f admet donc 1 et i comme pas récurrents. Nous commençons par déterminer les fréquences des solutions potentielles. Nous reprenons les notations de l'algorithme Pasrec. Nous avons

$$d = \max_{0 \le m \le 2} \deg P_m = 2 \quad \text{et} \quad e = \max_{0 \le n \le 3} \deg Q_n = 1.$$

Nous devons donc résoudre les équations

$$\text{(1.31)} \qquad X^2 - (1+e)X + e = 0$$

et

$$\text{(1.32)} \qquad 3Y^3 - (2+3e^{i-4\pi})Y^2 + (2e^{i-4\pi} - 1)Y + e^{i-4\pi} = 0.$$

Les racines de l'équation (1.31) sont $x_1 = 1$ et $x_2 = e$, celles de (1.32) étant $y_1 = 1, y_2 = -1/3$ et $y_3 = e^{i-4\pi}$. Nous faisons figurer dans le tableau 1.1 les valeurs des couples $(k_{j,l}, k'_{l,j})_{\substack{1\leq j\leq 2\\ 1\leq l\leq 3}}$ définis par

$$k_{j,l} = \mathrm{Re}(i \log x_j - \log y_l)/2\pi,$$

et

$$k'_{l,j} = \mathrm{Re}(i \log y_l + \log x_j)/2\pi$$

pour $1 \leq j \leq 2, 1 \leq l \leq 3$, log désignant la détermination principale du logarithme.

$(k_{j,l}, k'_{l,j})$	1	2	3
1	$(0,0)$	$\left(\frac{\log 3}{2\pi}, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(2, -\frac{1}{2\pi}\right)$
2	$\left(0, \frac{1}{2\pi}\right)$	$\left(\frac{\log 3}{2\pi}, -\frac{\pi-1}{2\pi}\right)$	$(2,0)$

Tableau 1.1.

Les seuls couples de $\mathbb{Z}^2$ sont $(k_{1,1}, k'_{1,1}) = (0,0)$ qui est associé à la fréquence $\delta_1 = \log x_1 + 2ik_{1,1}\pi = 0$ et $(k_{2,3}, k'_{3,2}) = (2,0)$ qui est lui associé à la fréquence $\delta_2 = \log x_2 + 2ik_{2,3}\pi = 1 + 4i\pi$.

Maintenant, nous allons déterminer grâce à l'algorithme d'Abramov un dénominateur commun aux fractions rationnelles solutions de la première équation du système (1.30). Nous avons ici $P_0(z) = e(z^2+\sqrt{2}z)$ et $P_2(z-2) = z^2+(\sqrt{2}-2)z$. Les racines de $P_0(z)$ sont 0 et $-\sqrt{2}$, celles de $P_2(z-2)$ valant 0 et $2-\sqrt{2}$. Nous calculons donc les différences entre les racines de $P_0(z)$ et celles de $P_2(z-2)$ et ne gardons que celles qui donnent une différence entière positive. La seule contribution est apportée par 0, la racine commune aux deux polynômes. L'entier N de l'algorithme vaut donc 0 et le polynôme $D(z)$ est égal à z.

Pour déterminer les fractions rationnelles x_s coefficients des fonctions $e^{\delta_s z}$ (avec $\delta_1 = 0$ et $\delta_2 = 1+4i\pi$), il nous faut donc résoudre les équations

$$\frac{(z^2+(2+\sqrt{2})z+2\sqrt{2})}{z+2}e^{2\delta_s}f(z+2) - \frac{(1+e)(z^2+(1+\sqrt{2})z+\sqrt{2})}{z+1}e^{\delta_s}f(z+1) + \frac{e(z^2+\sqrt{2}z)}{z}f(z) = 0.$$

Après simplifications, nous obtenons les équations

$$f(z+2)-(1+e)f(z+1)+ef(z)=0, \tag{1.33}$$

et

$$e^2 f(z+2)-(1+e)ef(z+1)+ef(z)=0. \tag{1.34}$$

Nous utilisons Poly pour déterminer les solutions polynomiales de la première équation. Nous calculons les polynômes H_j :

$$H_0=0, H_1=1-e \text{ et } H_2=1.$$

Nous avons donc $b=\max_{0\le j\le 2}(\deg H_j-j)=-1$. De plus, nous voyons que

$$\alpha(z)=\sum_{\substack{0\le j\le M\\ \deg H_j-j=b}} \mathrm{cd}(H_j)z^{\underline{j}}=(1-e)z.$$

Le degré du polynôme solution est donc borné par d avec

$$d=\max\big\{-b-1, \max\{z\in\mathbb{N}, \alpha(z)=0\}\big\}=\max\{-1,0\}=0.$$

Les seules solutions polynomiales possibles de l'équation (1.33) sont donc les constantes. Nous voyons facilement que $y_1(z)=1$ est bien solution de l'équation (1.33). Il ne nous reste plus qu'à vérifier que $x_1(z)e^{\delta_1 z}=y_1(z)/D(z)=1/z$ est bien solution de la deuxième équation du système (1.30) ce qui est le cas. De la même façon, nous trouvons, en utilisant Poly, que $y_1(z)=1$ est solution de (1.34). Nous montrons facilement que la fonction $x_2(z)e^{\delta_2 z}=y_2(z)e^{\delta_2 z}/D(z)=e^{(1+4i\pi)z}/z$ est bien solution de la deuxième équation aux diférences du système (1.30).

Pour terminer, nous devons déterminer les nombres complexes λ_1 et λ_2 qui font de la combinaison linéaire $z\mapsto \dfrac{\lambda_1+\lambda_2 e^{(1+4i\pi)z}}{z}$ une fonction entière. Il suffit de résoudre l'équation

$$\lambda_1+\lambda_2 e^{(1+4i\pi)0}=0.$$

La condition nécessaire est donc $\lambda_1=-\lambda_2$. Nous avons finalement montré que toute solution entière du système (1.30) est de la forme

$$z\mapsto \lambda\frac{e^{(1+4i\pi)z}-1}{z}$$

avec $\lambda\in\mathbb{C}$.

1.4.2 Cas où l'une des deux équations est une équation différentielle

Nous pouvons adapter facilement cet algorithme au cas où la fonction entière f est solution du système

$$\begin{cases} \sum_{0\leq m\leq M} P_m(z)f(z+m\alpha)=0, \\ \sum_{0\leq n\leq N} Q_n(z)f^{(n)}(z)=0, \end{cases} \tag{1.35}$$

où $(P_m)_{0\leq m\leq M}$ et $(Q_n)_{0\leq n\leq N}$ sont deux suites finies d'éléments de $\mathbb{C}[z]$ avec $P_M Q_N \neq 0$ et α un nombre complexe non nul. Nous savons alors, par le théorème 1.3 de [BéGra2] que f est encore le quotient d'un polynôme exponentiel par un polynôme. Nous injectons f sous la forme (1.23) dans la deuxième équation du système (1.35). Nous obtenons, toujours grâce à la liberté sur $\mathbb{C}(z)$ de la famille de fonctions $\left(e^{\delta\cdot}\right)_{\delta\in\mathbb{C}}$, les relations

$$\sum_{n=0}^{N} Q_n(z)\left(x_s(z)e^{\delta_s z}\right)^{(n)}=0. \tag{1.36}$$

pour tout $s\in\{1,\ldots,S\}$. La formule de Leibniz nous donne, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\left(x_s(z)e^{\delta_s z}\right)^{(n)}=e^{\delta_s z}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}{\delta_s}^{n-k}x_s^{(k)}(z).$$

La relation (1.36) entraîne

$$\sum_{n=0}^{N} Q_n(z)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}{\delta_s}^{n-k}\frac{x_s^{(k)}(z)}{x_s(z)}\right)=0.$$

En notant toujours b_n le coefficient de z^e dans $Q_n(z)$ et en faisant tendre z vers l'infini, nous obtenons l'équation $\sum_{n=0}^{N} b_n{\delta_s}^n=0$. Il nous faut alors modifier légérement la première étape de l'algorithme. L'étape 1 devient

Étape 1' : Détermination des fréquences δ_s

Nous devons résoudre les équations polynomiales en $X=e^{\alpha\delta}$ et $Y=\delta$

$$\sum_{m=0}^{M} a_m X^m=0 \text{ et } \sum_{n=0}^{N} b_n Y^n=0.$$

Nous trouvons ainsi J $(\leq M)$ classes distinctes de solutions dans $\mathbb{C}/(2i\pi\alpha^{-1}\mathbb{Z})$ pour la première équation que nous comparons aux L $(\leq N)$ solutions distinctes dans $\mathbb{C}$ pour la deuxième équation. Cela nous permet de trouver encore un nombre fini de fréquences complexes δ convenables.

1.4.2.1 Énoncé de l'algorithme Pasrecd

Nous rappelons que le pas récurrent α est un nombre complexe non nul quelconque. La seule chose qui change par rapport à l'algorithme Pasrec est le point 1. qui devient

1. [Détermination des fréquences]

   (a) $s_1 \leftarrow 0$, $d \leftarrow \max_{0 \leq m \leq M} \deg P_m$, $e \leftarrow \max_{0 \leq n \leq N} \deg Q_n$,
   $a_m \leftarrow$ coefficient de z^d dans $P_m(z)$,
   $b_n \leftarrow$ coefficient de z^e dans $Q_n(z)$.

   (b) Résoudre $\sum_{0 \leq m \leq M} a_m X^m = 0 \Rightarrow J$ racines distinctes $x_1, \ldots, x_J$.
   Résoudre $\sum_{0 \leq n \leq N} b_n Y^n = 0 \Rightarrow L$ racines distinctes $y_1, \ldots, y_L$.
   Pour $j = 1, \ldots, J$, pour $l = 1, \ldots, L$,
   $k_{j,l} \leftarrow (\alpha y_l - \log x_j)/(2i\pi)$
   si $k_{j,l} \in \mathbb{Z}$, alors
   $s_1 \leftarrow s_1 + 1$,
   $\delta_{s_1} \leftarrow y_l$.
   $S_1 \leftarrow s_1$.
   Si $S_1 = 0$, alors il n'y pas de solution entière autre que 0
   sinon la liste des fréquences admissibles est $[\delta_1, \ldots, \delta_{S_1}]$.

1.4.3 Implantation des algorithmes

Nous avons implanté ces deux algorihmes dans un module écrit en Maple que nous avons nommé Pasrec. Le module et la façon de l'utiliser sont présentés dans l'appendice B.

Il est important de préciser que si les algorithmes présentés dans le paragraphe précédent permettent de faire en théorie des calculs exacts, il y a plusieurs opérations requises qui ne peuvent être faites qu'avec des approximations. Nous avons donc choisi d'implanter les algorithmes sous une forme numérique en faisant les calculs à une précision près donnée par l'utilisateur. Ainsi, nous devons, dans les étapes 1 et 2 de l'algorithme, tester si certaines valeurs sont bien des éléments de $\mathbb{Z}$. Dans notre implantation, nous demandons à ces valeurs d'être entières modulo la précision donnée. De même, l'algorithme Poly et la troisième étape de l'algorithme nécessitent des résolutions de systèmes linéaires. Nous avons alors écarté tout recours à l'algorithme de Gauss, bien trop instable numériquement, pour lui préférer une méthode numérique, à savoir la méthode QR [LaTh] qui est actuellement la plus stable et la moins coûteuse pour les résolutions de problèmes aux moindres carrés et pour le calcul de valeurs propres et de vecteurs propres. L'utilisateur obtient donc des solutions entières approchées dont il peut vérifier la consistance en augmentant la précision qu'il indique à la machine.

Bibliographie

[Abr] S.A. Abramov, *Rational solutions of linear difference and q-difference equations with polynomial coefficients*, Proc. ISSAC '95, T. Levelt ed., ACM Press, New-York (1995), 285-289.

[BéGra1] J.-P. Bézivin et F. Gramain, *Solutions entières d'un système d'équations aux différences*, Ann. Inst. Fourier **43**-3 (1993), 791-814.

[BéGra2] J.-P. Bézivin et F. Gramain, *Solutions entières d'un système d'équations aux différences II*, Ann. Inst. Fourier **46**-2 (1996), 465-491.

[BrHa] N. Brisebarre et L. Habsieger, *Sur les fonctions à double pas récurrent*, soumis.

[Fuk] S. Fukasawa, *Über ganzwertige ganze Funktionen*, Tôhoku Math. J., **27** (1926), 41–52.

[Gel1] A.O. Gel'fond, *Sur les propriétés arithmétiques des fonctions entières*, Tôhoku Math. J., **30** (1929), 280–285.

[Gel2] A.O. Guelfond, *Calculs des différences finies*, Dunod, Paris, 1963.

[Gra1] F. Gramain, *Sur le théorème de Fukasawa-Gel'fond*, Inv. Math., **63** (1981), 495-506.

[Gra2] F. Gramain, *Équations aux différences et polynômes exponentiels*, C. R. Acad. Sciences Paris, **313** (1991), 131-134.

[GraMi] F. Gramain et M. Mignotte, *Fonctions entières arithmétiques*; Approximations diophantiennes et nombres transcendants, Luminy 1982, D. Bertrand et M. Waldschmidt eds, Progress in Math. **31**, 1983, 99-124. Birkhaüser, Boston.

[Gru] L. Gruman, Propriétés arithmétiques des fonctions entières, Bull. Soc. Math. France **108** (1980), 421–440.

[LaTh] P. Lascaux et R. Théodor, Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, Tomes 1 et 2, Masson, 1986 et 1987.

[Loe] J.-J. Loeb, Sur certaines équations aux différences associées à des groupes, prépublication.

[Mas1] D. Masser, *Sur les fonctions entières à valeurs entières*, C. R. Acad. Sci. Paris **291**, 1980, série A (1980), 1–4.

[Mas2] D. Masser, *On certain functional equations in several variables*; Approximations diophantiennes et nombres transcendants, Luminy 1982, D. Bertrand et M. Waldschmidt eds, Progress in Math. **31**, 1983, 173-190. Birkhaüser, Boston.

[Pól] G. Pólya, *Über ganzwertige ganze Funktionen*, Rend. Circ. Mat. Palermo **40** (1915), 1–16.

[PWZ] M. Petkovšek, H. S. Wilf, D. Zeilberger, *A=B*, A.K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 1996.

[Wal] M. Waldschmidt, *Nombres transcendants*, Lecture Notes in Math. **402**, Springer Verlag, Berlin, 1974.

[Zei] D. Zeilberger, *A holonomic systems approach to special functions identities*, J. Comp. Appl. Math. **32** (1990), 321-368.

Chapitre 2

Mesures d'irrationalité de $\log 2$ et $\pi/\sqrt{3}$

2.1 Introduction

On sait que la bonne façon de mesurer la qualité d'approximation d'un nombre réel x par un nombre rationnel p/q est de comparer la quantité $|x - p/q|$ à des puissances négatives du dénominateur q. Nous pouvons formaliser cette notion dans la définition suivante :

Définition 2.1. *Soit x un nombre réel, on dit que*
i) le nombre réel μ est une mesure d'irrationalité de x si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, q_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+ : \quad \forall (p,q) \in \mathbb{Z}^2,$$

$$q > q_0(\varepsilon) \Rightarrow \left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{q^{\mu+\varepsilon}}. \tag{2.1}$$

ii) le nombre réel μ est une mesure effective d'irrationalité de x si
$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, q_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$ *effectivement calculable tel que* (2.1) *soit vraie*
ou, ce qui est équivalent,
il existe une constante réelle $C > 0$ effective telle que

$$\forall\, (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^{\mu}}.$$

Bien entendu, une mesure effective d'irrationalité de x est une mesure d'irrationalité de x.

Une mesure d'irrationalité μ est nécessairement supérieure ou égale à 2, cela en vertu du Théorème de Lagrange [Lag1, Lag2] qui dit que l'inéquation

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

admet une infinité de couples $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ solutions.

D'autre part, un résultat dû à Khinchin [Khi] stipule que presque tout (au sens de Lebesgue) nombre réel admet une mesure d'irrationalité égale à 2. Parmi ces nombres réels, nous trouvons les nombres algébriques : ce résultat constitue le Théorème de Thue-Siegel-Roth [Ro] dont la publication date de 1955. Le Théorème suivant dû à Liouville [Liou1, Liou2, Liou3] et qui, contrairement au Théorème de Thue-Siegel-Roth, se démontre quasi-immédiatement, nous donne des résultats effectifs sur les nombres algébriques.

Théorème (J. Liouville, 1851) . *Soit x un nombre algébrique réel de degré $d \geq 2$. Alors il existe une constante effectivement calculable $C(x) > 0$ telle que, pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C(x)}{q^d} .$$

En particulier, les nombres algébriques quadratiques ont une mesure effective d'irrationalité égale à 2 ce qui est le résultat optimal recherché. Ce théorème nous dit donc qu'un nombre algébrique ne peut pas être trop bien approché par un nombre rationnel et il a permis à J. Liouville d'exhiber ainsi les premiers exemples de nombres transcendants. Il s'agissait des nombres réels de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} a^{-n!}$ avec $a \in \mathbb{N}, a \geq 2$, dont il prouve qu'ils ne peuvent pas satisfaire la conclusion de son théorème : ces nombres réels n'ont pas de mesure d'irrationalité finie. On appelle plus généralement nombre de Liouville un nombre réel qui n'a pas de mesure d'irrationalité finie.

Notons $\mu_{abs}(x)$ la mesure d'irrationalité absolue de x qui est égale à la borne inférieure de l'ensemble des mesures d'irrationalité de x si cet ensemble est non vide, et qui vaut $+\infty$ sinon. Les nombres de Liouville sont donc les nombres réels x tels que $\mu_{abs}(x) = +\infty$. Il faut noter qu'à tout nombre réel $b \geq 1$, nous pouvons associer un nombre réel x tel que $\mu_{abs}(x) = 1 + b$. En effet, considérons un nombre réel a strictement supérieur à 1. Si l'on désigne par $[c]$ la partie entière du nombre réel c, soit x le nombre réel dont le développement en fraction continue a pour suite de quotients partiels la suite $\left(\left[a^{b^n} \right] \right)_{n \in \mathbb{N}}$, i.e.

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left[a^{b^n} \right]$. Nous savons alors [Las] que $\mu_{abs}(x) = 1 + b$.

On ne connaît rien de général sur les mesures d'irrationalité de nombres transcendants. On a des résultats, effectifs alors, sur certaines constantes particulières. Dans le tableau suivant, nous donnons les meilleures mesures d'irrationalité connues à ce jour de quelques nombres remarquables.

$\log 2$	π	$\pi/\sqrt{3}$	$\zeta(2)$	$\zeta(3)$
3.8913997	8.016045	4.601579	5.441243	8.8302837
Rukhadze (1987)	Hata(1993)	Hata(1993)	Rhin-Viola (1996)	Hata (1990)

Pour calculer des mesures d'irrationalité d'un nombre réel x, il va nous falloir utiliser des bonnes approximations de x. Plus précisément, considérons un nombre complexe x, un nombre réel ρ, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{Z}+i\rho\mathbb{Z}$. Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $\varepsilon_n = q_n x - p_n$. De plus, nous noterons κ_ρ la constante définie par

$$\kappa_\rho = \begin{cases} |\rho| & \text{si } 0<|\rho|<1, \\ 1 & \text{si } \rho = 0 \text{ ou } \rho\geq 1. \end{cases} \tag{2.2}$$

L'étude du comportement asymptotique de q_n et ε_n va nous permettre d'obtenir une mesure d'irrationalité de x. Ce phénomène est décrit dans deux lemmes dont le premier découle de la proposition suivante.

Proposition 2.2. *Supposons qu'il existe six constantes $C_1, C_2, C_2', \sigma, \tau, \tau' > 0$ telles que*

$$\forall n\in\mathbb{N}, \qquad |q_n| \leq C_1 e^{\sigma n} \quad \text{et} \quad C_2' e^{-\tau' n} \leq |\varepsilon_n| \leq C_2 e^{-\tau n}. \tag{2.3}$$

Alors nous avons, pour tout couple (p,q) de $\mathbb{Z}^2$,

$$q\neq 0 \Rightarrow \left| x - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{|q|^{\frac{\tau'}{\tau}\left(1+\frac{\sigma}{\tau}\right)}},$$

avec

$$C = \min\Big(e^{-\sigma}|\varepsilon_0|^{\frac{\sigma}{\tau}}(1+|\varepsilon_0|)^{-1-\frac{\sigma}{\tau}}\kappa_\rho C_1^{-1} C_2^{-\frac{\sigma}{\tau}},$$
$$e^{-\tau'(1+\frac{\sigma}{\tau})}|\varepsilon_0|^{\frac{\tau'}{\tau}(1+\frac{\sigma}{\tau})}(1+|\varepsilon_0|)^{-\frac{\tau'}{\tau}(1+\frac{\sigma}{\tau})} C_1^{-1} C_2^{-\frac{\sigma}{\tau}-\frac{\tau'}{\tau}(1+\frac{\sigma}{\tau})} {C_2'}^{1+\frac{\sigma}{\tau}}\Big) > 0.$$

Preuve. Remarquons que, comme τ est strictement positif, la suite (ε_n) tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Cela entraîne que $x\notin\mathbb{Q}(i\rho)$: sinon $\varepsilon_n = 0$ à partir d'un certain rang, ce qui est impossible du fait de la condition (2.3). En particulier, nous aurons $\varepsilon_0\neq 0$.

Soient $(p,q)\in\mathbb{Z}^2$, avec $q\neq 0$. Posons

$$n = \inf\left\{ k\in\mathbb{N} : |q\varepsilon_k| \leq \frac{\kappa_\rho|\varepsilon_0|}{1+|\varepsilon_0|}\right\}.$$

Comme $\varepsilon_0\neq 0$, le nombre réel $\frac{\kappa_\rho|\varepsilon_0|}{1+|\varepsilon_0|}$ est strictement positif. Cela nous assure de l'existence de n, qui est nécessairement strictement positif.

La preuve se fait en distiguant deux cas.
Tout d'abord, si $pq_n - p_nq \neq 0$, nous avons

$$\frac{|\varepsilon_0|}{1+|\varepsilon_0|} < |q\varepsilon_{n-1}| \leq C_2|q|e^{-\tau(n-1)},$$

c'est-à-dire

$$e^{n-1} < \left(C_2\frac{1+|\varepsilon_0|}{|\varepsilon_0|}|q|\right)^{\frac{1}{\tau}}.$$

Nous obtenons donc la majoration suivante de $|q_n|$:

$$|q_n| \leq C_1e^{\sigma n} < C_1e^{\sigma}\left(C_2\frac{1+|\varepsilon_0|}{|\varepsilon_0|}|q|\right)^{\frac{\sigma}{\tau}}.$$

De plus, comme $pq_n - p_nq \neq 0$, nous avons

$$|q_n(qx-p)| \geq |p_nq - pq_n| - |q(q_nx-p_n)| \geq \kappa_\rho - |q\varepsilon_n| \geq \kappa_\rho - \frac{\kappa_\rho|\varepsilon_0|}{1+|\varepsilon_0|} = \frac{\kappa_\rho}{1+|\varepsilon_0|},$$

ce qui nous donne

$$\left|x-\frac{p}{q}\right| > \frac{C_3}{|q|^{1+\frac{\sigma}{\tau}}}$$

avec $C_3 = e^{-\sigma}|\varepsilon_0|^{\frac{\sigma}{\tau}}(1+|\varepsilon_0|)^{-1-\frac{\sigma}{\tau}}\kappa_\rho C_1^{-1}C_2^{-\frac{\sigma}{\tau}}$.

Ensuite, si $pq_n - p_nq = 0$, nous trouvons

$$q_n(qx-p) = q(q_nx-p_n) = q\varepsilon_n.$$

Comme nous avons

$$|q_n| \leq C_1e^{\sigma n} \leq C_1\left(\frac{C_2}{|\varepsilon_n|}\right)^{\frac{\sigma}{\tau}}$$

et

$$|\varepsilon_n| \geq C_2'e^{-\tau' n}1 \geq C_2'e^{-\tau'}\left(\frac{|\varepsilon_{n-1}|}{C_2}\right)^{\frac{\tau'}{\tau}} > C_2'e^{-\tau'}\left(\frac{|\varepsilon_0|}{(1+|\varepsilon_0|)C_2|q|}\right)^{\frac{\tau'}{\tau}},$$

nous obtenons

$$\left|x-\frac{p}{q}\right| = \left|\frac{\varepsilon_n}{q_n}\right| \geq C_1^{-1}C_2^{-\frac{\sigma}{\tau}}|\varepsilon_n|^{1+\frac{\sigma}{\tau}} > C_4|q|^{-\frac{\tau'}{\tau}(1+\frac{\sigma}{\tau})}$$

avec $C_4 = e^{-\tau'(1+\frac{\sigma}{\tau})}|\varepsilon_0|^{\frac{\tau'}{\tau}(1+\frac{\sigma}{\tau})}(1+|\varepsilon_0|)^{-\frac{\tau'}{\tau}(1+\frac{\sigma}{\tau})}C_1^{-1}C_2^{-\frac{\sigma}{\tau}-\frac{\tau'}{\tau}(1+\frac{\sigma}{\tau})}C_2'^{\,1+\frac{\sigma}{\tau}}$. Ainsi nous trouvons bien

$$\left|x-\frac{p}{q}\right| > \frac{C}{|q|^{\frac{\tau'}{\tau}(1+\frac{\sigma}{\tau})}},$$

avec $C = \min(C_3, C_4)$. □

Le premier lemme, qui est classique (voir par exemple [Chu1]), sera utilisé pour calculer une mesure d'irrationalité de $\log 2$.

Lemme 2.3. *Supposons que*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log|q_n| \leq \sigma, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log|\varepsilon_n| = -\tau$$

où σ et τ sont des nombres réels strictement positifs. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout couple (p,q) de $\mathbb{Z}^2$, il existe un entier $q_0(\varepsilon) \geq 0$ effectivement calculable tel que

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| > |q|^{-\mu-\varepsilon} \text{ pour } |q| > q_0(\varepsilon)$$

avec $\mu = 1 + \sigma/\tau$.

Preuve. Pour tout $\delta \in]0,\tau[$, il existe trois constantes $C_1, C_2, C_2' > 0$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |q_n| \leq C_1 e^{(\sigma+\delta)n} \quad \text{et} \quad C_2' e^{-(\tau+\delta)n} \leq |\varepsilon_n| \leq C_2 e^{-(\tau-\delta)n}$$

car, quitte à décaler les suites, nous pouvons supposer $\varepsilon_n \neq 0$ pour tout entier naturel n. D'après la Proposition 2.2, il existe une constante $C_\delta > 0$ telle que

$$\forall (p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{0\} \Rightarrow \left|x - \frac{p}{q}\right| > \frac{C_\delta}{|q|^{\frac{\tau+\delta}{\tau-\delta}(1+\frac{\sigma+\delta}{\tau-\delta})}}.$$

Pour $\varepsilon > 0$, choisissons $\delta > 0$ de sorte que $\frac{\tau+\delta}{\tau-\delta}(1+\frac{\sigma+\delta}{\tau-\delta}) \leq 1 + \frac{\sigma}{\tau} + \frac{\varepsilon}{2}$, et prenons $q_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$ tel que $q_0(\varepsilon)^{\frac{\varepsilon}{2}} \geq C_\delta^{-1}$. Alors, pour tout couple (p,q) de $\mathbb{Z}^2$,

$$|q| > q_0(\varepsilon) \Rightarrow \left|x - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{|q|^{1+\frac{\sigma}{\tau}+\varepsilon}}.$$

□

Le lemme qui suit provient de [Hat1]. Il nous servira à établir une mesure d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$. Dans ce dernier cas, nous avons des renseignements un peu moins bons sur le comportement asymptotique de ε_n et il nous faut en conséquence ajouter des hypothèses sur la suite $(p_n/q_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lemme 2.4. (M. Hata) *Supposons $q_n \neq 0$ pour tout $n \geq 0$ et*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log|q_n| \leq \sigma, \quad \limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log|\varepsilon_n| \leq -\tau$$

où σ et τ sont des nombres réels strictement positifs. Soit M un entier strictement positif fixé, soit $n \in \mathbb{N}$, soit $V_n \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des M nombres complexes

$$\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}, \ldots, \frac{p_{n+M-1}}{q_{n+M-1}}.$$

Supposons que, pour tout entier $n \geq 0$,
soit
i) V_n contient au moins deux points distincts,
soit
ii) V_n est réduit à un point z_0 irrationnel.
Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout couple (p, q) de $\mathbb{Z}^2$, il existe un entier $q_0(\varepsilon) \geq 0$ effectivement calculable tel que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| > |q|^{-\mu-\varepsilon} \text{ pour } |q| > q_0(\varepsilon)$$

avec $\mu = 1 + \sigma/\tau$.

Preuve. Pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$, considérons la forme linéaire $\Omega(p, q) = q\gamma - p$. Nous avons donc

$$\Omega(p, q) = \frac{1}{q_n} \left((qp_n - pq_n) + q\varepsilon_n \right).$$

Posons

$$S_n = qp_n - pq_n \text{ et } \theta_n = q\varepsilon_n.$$

La condition sur l'ensemble V_n énoncée dans le lemme entraîne qu'il existe un entier naturel $l_n \in [n, n+M]$ satisfaisant $S_{l_n} \neq 0$ pour tout $n \geq 0$. Remarquons que $|S_{l_n}| \geq \kappa_\rho$, κ_ρ étant la constante définie par (2.2), puisque $S_{l_n} \in \mathbb{Z} + i\rho\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Maintenant, pour tout $\varepsilon > 0$, soit $\delta \in]0, \tau[$ tel que $\frac{\sigma+\delta}{\tau-\delta} \leq \frac{\sigma}{\tau} + \frac{\varepsilon}{2}$. Nous savons alors qu'il existe un entier naturel n_0 tel que

$$|q_n| \leq e^{(\sigma+\delta)n} \text{ et } |\varepsilon_n| \leq e^{-(\tau-\delta)n} \text{ pour tout } n \geq n_0.$$

Soit q_0 le plus petit entier satisfaisant

$$q_0 \geq \frac{1}{2}\kappa_\rho e^{(\tau-\delta)n_0} \text{ et } (q_0)^{\frac{\varepsilon}{2}} \geq \left(\frac{2}{\kappa_\rho} \right)^{\frac{\sigma+\tau}{\tau-\delta}} e^{(\sigma+\delta)(M+1)}.$$

Pour tout entier $q \geq q_0$, soit $n_1 = n_1(q)$ le plus petit entier naturel tel que

$$q \leq \frac{1}{2}\kappa_\rho e^{(\tau-\delta)n_1}.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} |\Omega(p,q)| &\geq \frac{|S_{l_{n_1}}| - |\theta_{l_{n_1}}|}{|q_{l_{n_1}}|} \geq \frac{1}{2}\kappa_\rho e^{-(\sigma+\delta)(n_1+M)} \\ &\geq \left(\frac{1}{2}\kappa_\rho \right)^{\frac{\sigma+\tau}{\tau-\delta}} e^{-(\sigma+\delta)(M+1)} q^{-\frac{\sigma}{\tau} - \frac{\varepsilon}{2}} \\ &\geq q^{-\frac{\sigma}{\tau} - \varepsilon}, \end{aligned}$$

ce qui était le résultat attendu. □

Remarque 2.5. Les mesures d'irrationalité données par la proposition et les lemmes sont toutes effectivement calculables.

Nous rappelons maintenant brièvement deux résultats classiques qui interviendront systématiquement dans les calculs des constantes σ et τ.

Tout d'abord, notons d_n le p.p.c.m. de $\{1, 2, \ldots, n\}$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\Theta(x)$ la somme $\sum_{\substack{p \text{ premier} \\ p \leq x}} \log p$, le théorème des nombres premiers [EllMF] nous dit que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\log d_n}{n} = 1 \tag{2.4}$$

et

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\Theta(x)}{x} = 1. \tag{2.5}$$

Enfin, nous rappelons un résultat de la théorie de l'intégration [Rud] : pour toute fonction complexe f intégrable sur un espace mesurable X, relativement à une mesure positive μ, nous avons

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \left(\int_X |f(x)|^n \mathrm{d}\mu(x) \right) = \log \sup_{x \in X} |f(x)|. \tag{2.6}$$

Pour trouver des relations de la forme $\varepsilon_n = q_n x - p_n$, la démarche consiste à établir des relations plus générales de la forme

$$E_n(z) = Q_n(z) f(z) - P_n(z) \tag{2.7}$$

où $E_n(z) \in \mathbb{C}[[z]], P_n(z)$ et $Q_n(z) \in \mathbb{C}[z]$ et $f(z)$ une fonction qui vaut x si on la spécialise en un nombre complexe convenable. L'approche classique pour établir des relations du type de (2.7) est celle des approximants de Padé.

Définition 2.6. *Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des fonctions analytiques en 0 (ou des séries formelles). On appelle*

i) système d'approximants de Padé de type I de $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ d'ordre N un n-uplet $(A_1, \ldots, A_n)$ de polynômes non tous nuls vérifiant

$$1)\ \deg A_i \leq N \text{ pour tout } i, 1 \leq i \leq n,$$
$$2)\ 1 + \mathrm{ord}_0 \left(\sum_{i=1}^{n} A_i f_i \right) \geq n(N+1).$$

La fonction $R = \sum_{i=1}^{n} A_i f_i$ s'appelle le reste de l'approximation.

ii) système d'approximants de Padé de type II de $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ d'ordre N un n-uplet $(B_1, \ldots, B_n)$ de polynômes non tous nuls vérifiant

$$1)\ \deg B_i \leq (n-1)N \text{ pour tout } i, 1 \leq i \leq n,$$
$$2)\ \mathrm{ord}_0 (B_l f_k - B_k f_l) \geq nN + 1.$$

En 1909, Padé construisit les approximants de la fonction hypergéométrique

$$ {}_2F_1(1,b;c;x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(b)_n}{(c)_n} x^n $$

où $c > 0$ et $(b)_n = b(b+1)\dots(b+n-1)$. Le recours à plusieurs systèmes d'approximants de Padé des fonctions $1, \log(1+z), \dots, \log(1+z)^m, m \in \mathbb{N}$, a permis en 1964 à A. Baker [Ba] (qui reprenait alors des idées de K. Mahler [Mah]) de trouver une mesure d'irrationalité de $\log 2$ égale à 12.5. Ici, nous allons nous intéresser au cas particulier $n = 2$ (les définitions i) et ii) coïncidant alors) avec $f_1(z) = \log(1-z)$ et $f_2(z) = 1$. En effet, la substitution $z = -1$ dans $\log(1-z)$ donne $\log 2$, celle $z = e^{-i\pi/3}$ donne $\pi/\sqrt{3}$ et de plus $\log(1-z) = z\ {}_2F_1(1,1;2;z)$.

En 1980, K. Alladi et M. L. Robinson [AlRob] utilisent des approximants de Padé de 1 et $\log(1-z)$ pour établir des mesures d'irrationalité de $\log 2$ et $\pi/\sqrt{3}$. Ils traitent dans leur article l'analogue à une dimension du travail de F. Beukers [Beu] dans lequel ce dernier redémontrait l'irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$, déjà établie par Apéry [Ap], à l'aide de formules intégrales bi et tri-dimensionnelles utilisant les polynômes de Legendre

$$ L_n(z) = \frac{1}{n!}\left(z^n(1-z)^n\right)^{(n)}. $$

Précisément, ils considèrent l'intégrale

$$ \begin{aligned} \varepsilon_n(z) &= d_n z^{2n+1} \int_0^1 \frac{t^n(1-t)^n}{(1-zt)^{n+1}} \mathrm{d}t \\ &= Q_n(z)\log(1-z) - P_n(z) \end{aligned} $$

qui fournit les approximants de Padé de la fonction $\log(1-z)$. Remarquons que pour $z \notin [1, \infty[$ et $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, nous avons

$$ \int_0^1 \frac{t^m}{1-zt} \mathrm{d}t = \frac{-1}{z^{m+1}} \left[\log(1-z) + \sum_{k=1}^{m} \frac{z^k}{k} \right]. $$

Nous pouvons donc écrire

$$ \int_0^1 \frac{L_n(t)}{1-zt} \mathrm{d}t = \frac{-1}{z} L_n\left(\frac{1}{z}\right) \log(1-z) + H_n\left(\frac{1}{z}\right) d_n^{-1} $$

où $H_n(z) \in z\mathbb{Z}[z]$.
En intégrant n fois par parties, nous obtenons

$$ \int_0^1 \frac{L_n(t)}{1-zt} \mathrm{d}t = (-z)^n \int_0^1 \frac{t^n(1-t)^n}{(1-zt)^{n+1}} \mathrm{d}t. $$

Il ne reste plus qu'à poser

$$\begin{aligned} P_n(z) &= (-z)^{n+1} H_n\left(\frac{1}{z}\right), \\ Q_n(z) &= -d_n(-z)^n L_n\left(\frac{1}{z}\right). \end{aligned}$$

Il faut maintenant spécialiser les relations obtenues en $z = -1$ et $z = e^{-i\pi/3}$. Remplaçons donc z par -1 dans $\varepsilon_n(z)$ et $Q_n(z)$. Nous obtenons alors

$$q_n(-1) = -d_n L_n(-1) \quad \text{et} \quad \varepsilon_n(-1) = -d_n \int_0^1 \frac{t^n(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} \mathrm{d}t.$$

Étudions tout d'abord le comportement asymptotique de q_n. Soit r un nombre réel strictement positif, nous notons C_r le cercle de centre -1 et de rayon r. La formule de Cauchy nous donne

$$q_n(-1) = -d_n \oint_{C_r} \frac{z^n(1-z)^n}{(z+1)^{n+1}} \frac{\mathrm{d}z}{2i\pi}.$$

Nous avons donc, pour tout $r > 0$,

$$|q_n(-1)| \leq d_n \left(\frac{(1+r)(2+r)}{r}\right)^n,$$

et, par conséquent, en se rappelant (2.4),

(2.8)
$$\sigma(-1) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log|q_n| \leq 1 + \min_{r>0} \log \frac{(1+r)(2+r)}{r} = 1 + \log(3+2\sqrt{2}).$$

D'autre part, comme nous avons posé

$$\varepsilon_n = d_n \int_0^1 \frac{t^n(1-t)^n}{(1+t)^n} \frac{\mathrm{d}t}{1+t},$$

nous avons facilement par (2.4) et (2.6)

$$(2.9) \quad -\tau(-1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log|\varepsilon_n| = 1 + \max_{0\leq t\leq 1} \log \frac{t(1-t)}{1+t} = 1 + \log(3-2\sqrt{2}).$$

Ces calculs permettent à Alladi et Robinson d'obtenir

$$\mu(\log 2) = 4\log(\sqrt{2}+1)/(2\log(\sqrt{2}+1)-1) = 4.62210083....$$

Ils explicitaient ainsi les résultats (annoncés indépendamment) d'Apéry [Ap] et Danilov [Da] qui, en 1978, donnaient une mesure d'irrationalité de $\log 2$ égale à 4.622. De la même façon, ils établissent une mesure d'irrationalité égale à 8.310 pour $\pi/\sqrt{3}$.

Il faut noter la présence d'extrema de fonctions dans les expressions de σ et τ. Il en sera ainsi dans tous les calculs des constantes σ et τ que nous ferons par la suite. Nous appellerons ces extrema respectifs composantes analytiques de σ et de τ.

En 1987, G. Rhin [Rh] généralise l'approche d'Alladi et Robinson. Son objectif est d'augmenter le nombre réel τ et donc de diminuer $-\tau$. L'idée est donc de diminuer la composante analytique de τ, i.e. le maximum de la fonction $t \to t(1-t)/(1+t)$ en remplaçant cette fonction par une autre qui va donner une meilleure composante analytique. Cela revient à remplacer dans $\varepsilon_n(z)$ le polynôme $t^n(1-t)^n$ par d'autres polynômes ayant donc un meilleur comportement analytique. Cette approche lui permet tout d'abord d'expliciter l'annonce de $\mu(\log 2) = 4.26517429$ faite par D. V. et G. V. Chudnovsky dans [Chu2] puis celle faite dans [Chu3] par G. V. Chudnovsky qui était $\mu(\log 2) = 4.134400029$. Et surtout, en considérant le polynôme $\prod_{1\le i\le 6} 2P_i(t)^{[a_i n]}$, où les P_i et les a_i sont donnés par le tableau 2.1 ci-dessous, il obtient une mesure d'irrationalité de $\log 2$ égale à 4.0765.

i	$P_i(t)$	a_i
1	$t(1-t)$	$0,84943$
2	t^2+2t-1	$0,02401$
3	$6t^2-5t+1$	$0,091$
4	$7t^2-6t+1$	$0,02068$
5	$13t^2-11t+2$	$0,0113$
6	$2t^4+3t^3+3t^2-5t+1$	$0,00179$

Tableau 2.1.

Il annonce aussi, toujours dans [Rh], une mesure d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$ valant 4.97.

Une nouvelle étape va être franchie en 1987 par E. A. Rukhadze [Ruk]. Elle va utiliser une nouvelle classe de polynômes

$$\begin{aligned} R_{n,m,m'}(z) &= \frac{1}{(n-m')!}\left(z^{n+m-m'}(1-z)^n\right)^{(n-m')} \\ &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\binom{n+m-m'+j}{n-m'}z^{m+j} \end{aligned}$$

où n, m et $m' \in \mathbb{N}$ et $n \geq m'$, pour obtenir une mesure d'irrationalité de $\log 2$ égale à 3.893. Toujours en 1987, A. K. Dubitskas [Dub1] va se servir des polynômes

$R_{n,m,m'}$ pour calculer une mesure d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$ égale à 5.52 qui était la meilleure connue alors, l'annonce de G. Rhin d'une mesure d'irrationalité de 4.97 ayant été faite sans preuve explicite.

En 1990, M. Hata [Hat1], à l'aide d'une autre classe d'approximants, obtient, parmi d'autres résultats,

$$\mu(\log 2) = 3.8913998... \text{ et } \mu(\pi/\sqrt{3}) = 5.0874626... .$$

Pour cela, il considére les polynômes

$$\begin{aligned} H_{n,m,m'}(z) &= \frac{1}{(n+m-m')!}(z^{n-m'}(1-z)^{n+m})^{(n+m-m')} \\ &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^{m+j}\binom{n+m}{m+j}\binom{n+m-m'+j}{n+m-m'}z^j \end{aligned}$$

avec $n, m, m' \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq m'$.

Enfin, D. V. et G. V. Chudnovsky annoncent (sans preuve) dans [Chu4] avoir établi

$$\mu(\log 2) = 3.87 \text{ et } \mu(\pi/\sqrt{3}) = 4.96$$

à l'aide de la classe de polynômes

$$C_{n,m}(z) = \frac{1}{m!}(L_n(z))^{(m)},$$

la notation L_n désignant encore le n-ième polynôme de Legendre.

En fait, les classes $R_{n,m,m'}, H_{n,m,m'}, C_{n,m}$ sont des sous-familles d'une classe plus générale de polynômes que nous définissons comme suit

$$\begin{aligned} P_{n,m,m'}(z) &= \frac{1}{(n+m+m')!}(z^{n+m'}(1-z)^{n+m})^{(n+m+m')} \\ &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^{m+j}\binom{n+m}{m+j}\binom{n+m+m'+j}{n+m+m'}z^j \end{aligned} \tag{2.10}$$

où $n \in \mathbb{N}$, $m, m' \in \mathbb{Z}$ tels que $n \geq -\min(m, m', m+m')$. Nous appellerons cette familles d'approximants polynômes de Legendre généralisés, la substitution $m = m' = 0$ permettant de retrouver les polynômes de Legendre L_n. Si nous supposons que m et m' appartiennent à $\mathbb{N}$, nous constatons alors que

$$R_{n,m,m'} = P_{n-m,-m,-m'},\ H_{n,m,m'} = P_{n,m,-m'} \text{ et } C_{n,m} = P_{n+m,m,m}.$$

L'intérêt de ces polynômes est qu'ils un contenu important. Les composantes analytiques qui vont apparaître lors des calculs de σ et τ vont être moins bonnes que celles intervenant dans l'approche de base d'Alladi et Robinson et par conséquent bien moins bonnes que celles trouvées dans l'approche développée par Rhin mais cette perte va être largement compensée par l'apparition d'une nouvelle composante que nous appellerons composante arithmétique. Cette composante arithmétique est directement reliée au contenu de ces polynômes comme nous allons le voir par la suite.

Rukhadze, Dubitskas et Hata n'ayant étudié leurs classes de polynômes que dans le cas où $|m| = |m'|$, nous nous proposons dans un premier temps d'établir des résultats nous permettant de procéder à une étude exhaustive des mesures d'irrationalité de $\log 2$ et $\pi/\sqrt{3}$ que l'on peut établir à l'aide des polynômes $P_{n,m,m'}$. Nous généralisons donc les travaux de Rukhadze, Dubitskas et Hata et nous profiterons de cette étude pour examiner l'annonce faite par les Chudnovsky. Dans un second temps, nous ajouterons des facteurs supplémentaires à la classe des polynômes de Legendre généralisés et observerons les effets de cette perturbation.

2.2 Calculs de mesures d'irrationalité de $\log 2$ et $\pi/\sqrt{3}$ à l'aide d'une généralisation d'une étude de Hata

Nous allons tout d'abord généraliser les outils techniques développés dans [Hat1] puis nous établirons des formules qui donnent des mesures d'irrationalité. Nous exhiberons des figures qui permettent de cerner le domaine où nous pouvons trouver des bonnes valeurs. Puis nous calculerons effectivement ces valeurs dont les figures indiquent qu'elles sont les meilleures que nous pouvons obtenir à l'aide de nos outils (et qui sont celles obtenues dans [Ruk] et [Hat1] pour $\log 2$ et [Hat1] pour $\pi/\sqrt{3}$).

2.2.1 Lemmes techniques

2.2.1.1 Un lemme arithmétique

Nous allons maintenant faire une étude du contenu des polynômes (2.10). Pour cela, nous allons en fait généraliser le Lemme 2.5 de [Hat1].

Lemme 2.7. *Soient λ, λ' deux nombres réels tels que $\min(\lambda, \lambda', \lambda + \lambda') > -1$, soient M et M' deux suites d'entiers relatifs telles que*

$$n \geq -\min(M(n), M'(n)) \text{ et } \max\{|\lambda n - M(n)|, |\lambda' n - M'(n)|\} \leq C_{\lambda,\lambda'}$$

où $C_{\lambda,\lambda'}$ est une constante positive indépendante de n. Alors il existe un diviseur commun $d_{\lambda,\lambda',n}$ des coefficients de $P_{n,M(n),M'(n)}$ tel que

$$e(\lambda, \lambda') := \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log d_{\lambda,\lambda',n} = \int_{E(\lambda,\lambda')} \frac{\mathrm{d}x}{x^2},$$

où $E(\lambda, \lambda')$ est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts définie par

$$E(\lambda,\lambda') = \Big\{ x > 0,\, 0 < \{x\} + \{\lambda' x\} - 1 < 1 - \{\lambda x\} < \{x\} \Big\}.$$

Preuve. Posons $\delta_n = \frac{C_{\lambda,\lambda'}}{\sqrt{(2+\lambda+\lambda')n+1}}$. Pour n assez grand, nous avons $\delta_n < \frac{1}{6}$. Posons encore

$$E_n(\lambda,\lambda') = \Big\{ x > 0, 1 - \min(\{\lambda' x\}, \{\lambda x\}) + \delta_n < \{x\} < 2 - 2\delta_n - \max(\{\lambda' x\} + \{\lambda x\}, 1) \Big\}.$$

Nous considérons les trois suites $\left(\frac{k}{\lambda}\right)_{k\in\mathbb{N}}, \left(\frac{l}{\lambda'}\right)_{l\in\mathbb{N}}, (q)_{q\in\mathbb{N}}$. Rangeons les éléments de ces trois suites dans un ordre croissant : nous obtenons une suite croissante $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de nombres réels. Il est alors clair que sur $]a_m, a_{m+1}[$, les fonctions

$$x \mapsto 1 - \min(\{\lambda' x\}, \{\lambda x\}) + \delta_n - \{x\}$$

et

$$x \mapsto 2 - 2\delta_n - \max(\{\lambda' x\} + \{\lambda x\}, 1) - \{x\}$$

sont affines donc continues ce qui montre que $I_{n,m,\lambda,\lambda'} = E_n(\lambda,\lambda') \cap]a_m, a_{m+1}[$ est ouvert. Cela entraîne que $E_n(\lambda,\lambda')$ est ouvert puisqu'il ne contient aucun des éléments de la suite $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$. De plus, il est clair que la suite $(E_n(\lambda,\lambda'))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n(\lambda,\lambda') = E(\lambda,\lambda')$.

Nous définissons l'ensemble H_n comme suit

$$H_n = \left\{ p \text{ premiers tels que } p \geq \sqrt{(2+\lambda+\lambda')n+1} \text{ et } \frac{n}{p} \in E_n(\lambda,\lambda') \right\}.$$

Posons

$$d_{\lambda,\lambda',n} = \prod_{p\in H_n} p.$$

Nous allons montrer que tout élément p de H_n divise les coefficients du polynôme $P_{n,M(n),M'(n)}$, i.e. pour tout entier j appartenant à l'intervalle $[0,n]$, le nombre premier p divise $\binom{n+M(n)}{M(n)+j}\binom{n+M(n)+M'(n)+j}{n+M(n)+M'(n)}$. Soit j un entier de $[0,n]$, notons

$$\alpha = \left\{\frac{n}{p}\right\}, \beta = \left\{\frac{M(n)}{p}\right\}, \gamma = \left\{\frac{M'(n)}{p}\right\}, \theta = \left\{\frac{j}{p}\right\}$$

de sorte que l'exposant de p dans $\binom{n+M(n)}{M(n)+j}\binom{n+M(n)+M'(n)+j}{n+M(n)+M'(n)}$ vaut

$$v_p(\theta) = [\alpha+\beta] - [\beta+\theta] - [\alpha-\theta] + [\alpha+\beta+\gamma+\theta] - [\alpha+\beta+\gamma]. \tag{2.11}$$

Comme $\frac{n}{p}$ appartient à $E_n(\lambda, \lambda')$, les nombres $\left\{\frac{\lambda n}{p}\right\}$ et $\left\{\frac{\lambda' n}{p}\right\}$ sont dans l'intervalle $]3\delta_n, 1-3\delta_n[$. Nous avons aussi

$$\max\left(\left|\frac{\lambda n}{p} - \frac{M(n)}{p}\right|, \left|\frac{\lambda' n}{p} - \frac{M'(n)}{p}\right|\right) \leq \frac{C_{\lambda,\lambda'}}{p} \leq \frac{C_{\lambda,\lambda'}}{\sqrt{(2+\lambda+\lambda')n+1}} = \delta_n.$$

Nous en déduisons les inégalités

$$\left|\left\{\frac{\lambda n}{p}\right\} - \beta\right| \leq \delta_n \text{ et } \left|\left\{\frac{\lambda' n}{p}\right\} - \gamma\right| \leq \delta_n.$$

Nous savons alors que

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &\geq \left\{\frac{n}{p}\right\} + \left\{\frac{\lambda n}{p}\right\} - \delta_n > 1, \\ \alpha+\beta+\gamma &\leq \left\{\frac{n}{p}\right\} + \left\{\frac{\lambda n}{p}\right\} + \left\{\frac{\lambda' n}{p}\right\} + 2\delta_n < 2, \\ \text{et} \quad \alpha+\gamma &\geq \left\{\frac{n}{p}\right\} + \left\{\frac{\lambda' n}{p}\right\} - \delta_n > 1. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} &[\alpha+\beta] - [\beta+\theta] - [\alpha-\theta] + [\alpha+\beta+\gamma+\theta] - [\alpha+\beta+\gamma] \\ &\qquad = -[\alpha-\theta] + [\alpha+\beta+\gamma+\theta] - [\beta+\theta] \\ &\qquad \geq 1, \end{aligned}$$

puisque $[\alpha-\theta] \leq 0$ et $\alpha+\gamma > 1$. Étudions maintenant le comportement asymptotique de $d_{\lambda,\lambda',n}$. Soit l un entier fixé arbitrairement grand et $I =]a, b[$ une composante connexe quelconque de $E_l(\lambda, \lambda')$. L'intervalle I sera alors un sous-ensemble de $E_n(\lambda, \lambda')$ pour tout entier $n \geq l$. Si $n \geq (3+\lambda+\lambda')b^2$, tout nombre premier p de l'intervalle $J_n =]\frac{n}{b}, \frac{n}{a}[$ appartiendra à H_n : en effet, nous aurons $p^2 > \frac{n^2}{b^2} \geq (2+\lambda+\lambda')n+1$ et $\frac{n}{p} \in]a, b[$. Nous obtenons ainsi la minoration

$$\sum_{\substack{p \text{ premier} \\ p \in J_n}} \log p \geq \left(\Theta\left(\frac{n}{a}\right) - \Theta\left(\frac{n}{b}\right) - \log\left(\frac{n}{a}\right)\right).$$

Nous avons donc grâce à (2.5)

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{p \text{ premier} \\ p \in J_n}} \log p \geq \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \int_I \frac{\mathrm{d}x}{x^2},$$

ce qui entraîne

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\log d_{\lambda,\lambda',n}}{n} \geq \int_{E_l(\lambda,\lambda')} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

En faisant tendre l vers l'infini, nous obtenons

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\log d_{\lambda,\lambda',n}}{n} \geq \int_{E(\lambda,\lambda')} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

La majoration

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log d_{\lambda,\lambda',n}}{n} \leq \int_{E(\lambda,\lambda')} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

s'obtient de manière similaire, en considérant l'ensemble

$$H_n = \left\{ p \text{ premiers tels que } p \geq \sqrt{(2+\lambda+\lambda')n+1} \text{ et } \frac{n}{p} \in E(\lambda,\lambda') \right\}.$$

$\square$

Remarque 2.8. Il est facile de montrer que le gain arithmétique procuré par ce lemme est optimal. En effet, la condition $v_p(\theta) \geq 1$, v_p étant défini par la condition (2.11), examinée en $\theta = 0$ et $\theta = 1-\beta$ rend nécessaires les inégalités définissant l'ensemble $E(\lambda,\lambda')$.

Nous allons maintenant donner une formule explicite pour le calcul de l'intégrale considérée dans le lemme précédent.

2.2.1.2 Un algorithme de calcul de l'intégrale $e(\lambda,\lambda')$

Dans ce paragraphe, nous décrivons un algorithme permettant de calculer $\int_{E(\lambda,\lambda')} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ lorsque λ et λ' sont des nombres rationnels soumis aux hypothèses du Lemme 2.7. Soient $\lambda = b/a$ et $\lambda' = c/a$ avec a un entier naturel et b, c deux entiers relatifs tels que $a > -\min(b, c, b+c)$ et $abc \neq 0$. Nous avons

$$E\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right) = \left\{ x > 0,\ 0 < \{x\} + \left\{\frac{c}{a}x\right\} - 1 < 1 - \left\{\frac{b}{a}x\right\} < \{x\} \right\}.$$

Considérons les trois suites finies

$$\left(\frac{j}{a}\right)_{j\in\mathbb{N}} \cap [0,1],\ \left(\frac{k}{|b|}\right)_{k\in\mathbb{N}} \cap [0,1] \text{ et } \left(\frac{l}{|c|}\right)_{l\in\mathbb{N}} \cap [0,1].$$

Le rangement des éléments de ces trois suites dans un ordre croissant nous donne une suite croissante finie $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}, 0\leq m\leq M(a,b,c)}$ de nombres réels telle que $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_{M(a,b,c)} = 1$. Nous allons construire à partir de cette suite un recouvrement de $\mathbb{R}_{>0}$ par une suite d'intervalles ouverts disjoints deux à deux. L'intérêt de cette construction est que l'intersection de $E\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right)$ avec chacun des intervalles du recouvrement est un intervalle, sur lequel l'intégration de la fonction $x \to 1/x^2$ va être bien évidemment très aisée.

Écrivons

$$e\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right) = \int_{E\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right)} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \sum_{q\in\mathbb{N}} \sum_{m=0}^{M(a,b,c)-1} \int_{E\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right)\cap\,]a(q+\alpha_m),a(q+\alpha_{m+1})[} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

D'après la forme de la suite $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N},0\leq m\leq M(a,b,c)}$, nous savons qu'il existe trois entiers j, k et l tels que

$$]a\alpha_m, a\alpha_{m+1}[\,=\,]j, j+1[\,\cap\,\left]\frac{ak}{|b|}, \frac{a(k+1)}{|b|}\right[\,\cap\,\left]\frac{al}{|c|}, \frac{a(l+1)}{|c|}\right[.$$

Si nous considérons un nombre réel $x \in\,]a\alpha_m, a\alpha_{m+1}[$, nous savons qu'alors

$$x \in\,]j, j+1[\,,\ \frac{|b|}{a}x \in\,]k, k+1[\ \text{ et }\ \frac{|c|}{a}x \in\,]l, l+1[\,.$$

Nous en déduisons que

$$\{x\} = x - [x] = x - [a\alpha_m],$$

$$\left\{\frac{b}{a}x\right\} = \frac{b}{a}x - \left[\frac{b}{a}x\right] = \frac{b}{a}x - \inf([b\alpha_m],[b\alpha_{m+1}])$$

et

$$\left\{\frac{c}{a}x\right\} = \frac{c}{a}x - \left[\frac{c}{a}x\right] = \frac{c}{a}x - \inf([c\alpha_m],[c\alpha_{m+1}]).$$

Dire que $x \in E\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right)$ signifie que

$$0 < \{x\} + \left\{\frac{c}{a}x\right\} - 1 < 1 - \left\{\frac{b}{a}x\right\} < \{x\}.$$

Nous avons alors les inégalités équivalentes

$$\begin{aligned}0 < \left(1+\frac{c}{a}\right)x - ([a\alpha_m] + \inf([c\alpha_m],[c\alpha_{m+1}])) - 1 \\ < 1 - \frac{b}{a}x + \inf([b\alpha_m],[b\alpha_{m+1}]) < x - [a\alpha_m].\end{aligned}$$

Le nombre réel x vérifie donc les trois conditions

$$\begin{aligned}x &> \frac{1+\inf([b\alpha_m],[b\alpha_{m+1}]) + [a\alpha_m]}{1+\frac{b}{a}} := x_1(m),\\ x &< \frac{2+[a\alpha_m] + \inf([b\alpha_m],[b\alpha_{m+1}]) + \inf([c\alpha_m],[c\alpha_{m+1}])}{1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}} := x_2(m),\\ x &> \frac{1+[a\alpha_m] + \inf([c\alpha_m],[c\alpha_{m+1}])}{1+\frac{c}{a}} := x_3(m).\end{aligned}$$

Posons alors

$$y_1(m) = \max\left(\frac{x_1(m)}{a}, \frac{x_3(m)}{a}, \alpha_m\right) \quad \text{et} \quad y_2(m) = \min\left(\alpha_{m+1}, \frac{x_2(m)}{a}\right).$$

Il est clair, d'après ce que nous venons d'écrire et le fait que les fonctions considérées dans l'ensemble $E\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right)$ sont a-périodiques, que

$$E\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right) \cap]a(q+\alpha_m), a(q+\alpha_{m+1})[=]a(q+y_1(m)), a(q+y_2(m))[$$

pour tous m et q de $\mathbb{N}, 0 \leq m \leq M(a,b,c)-1$. Effectuons alors le calcul

$$\begin{aligned}\sum_{q\in\mathbb{N}} \int_{E\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right)\cap]a(q+\alpha_m),a(q+\alpha_{m+1})[} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} &= \sum_{q\in\mathbb{N}} \int_{a(q+y_1(m))}^{a(q+y_2(m))} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \\ &= \sum_{q\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{a(q+y_1(m))} - \frac{1}{a(q+y_2(m))}\right) \\ &= \frac{1}{a}\sum_{q\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{q+y_1(m)} - \frac{1}{q+y_2(m)}\right).\end{aligned}$$

Si nous désignons par ψ la fonction digamma Γ'/Γ, nous savons (voir [Er], p. 15) que pour tous réels α, β, $0 < \alpha < \beta < 1$, nous avons

$$\sum_{q\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{q+\alpha} - \frac{1}{q+\beta}\right) = \psi(\beta) - \psi(\alpha). \tag{2.12}$$

Nous avons donc obtenu la formule explicite

$$e\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right) = \frac{1}{a} \sum_{m=0}^{M(a,b,c)-1} \big(\psi\left(y_2(m)\right) - \psi\left(y_1(m)\right)\big).$$

Dans le cas où $|b| = |c| = 1$, nous pouvons obtenir, comme indiqué dans [Hat1], une formule plus pratique encore. En particulier, nous avons (le lecteur pourra se référer à [Hab] pour les calculs détaillés)

$$e\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right) = \log\left(\frac{a+1}{(a+2)^{\frac{a+2}{2(a+1)}} a^{\frac{a}{2(a+1)}}}\right) + \frac{\pi}{2(a+1)}(\chi(a+2) - \chi(a))$$

et

$$e\left(\frac{1}{a}, \frac{-1}{a}\right) = \log\left(\frac{(a+1)^{\frac{a+1}{2a}}(a-1)^{\frac{a-1}{2a}}}{a}\right) + \frac{\pi}{2a}(\chi(a+1) - \chi(a-1))$$

en ayant posé

$$\chi(a) = \sum_{r=1}^{[\frac{a}{2}]} \operatorname{cotan}\left(r\frac{\pi}{a}\right) .$$

Comme expliqué dans [Hat1], nous pouvons calculer $\chi(a)$ pour des petites valeurs de a. Ainsi, nous avons

$$\chi(1) = \chi(2) = 0\,,\ \chi(3) = \frac{1}{\sqrt{3}}\,,\ \chi(4) = 1\,,$$
$$\chi(5) = \sqrt{2 + \frac{2}{\sqrt{5}}},\ \chi(6) = \frac{4}{\sqrt{3}}\,,\ \chi(8) = 1 + 2\sqrt{2}\,,$$
$$\chi(10) = 4\sqrt{1 + 2\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \chi(12) = 5 + \frac{4}{\sqrt{3}}\,.$$

2.2.1.3 Relations entre les contenus des polynômes utilisés par Dubitskas, Hata, Rukhadze et Chudnovsky

Soient $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tels que $a > -\min(b, c, b+c)$, nous noterons $I(a, b, c)$ l'intégrale $a\, e\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right)$. Nous définissons deux transformations ω_1 et ω_2 de $\mathbb{Z}^3$ par

$$\omega_1(a, b, c) = (a + b, -b, c) \tag{2.13}$$

et

$$\omega_2(a, b, c) = (a + c, b, -c). \tag{2.14}$$

Les fonctions ω_1 et ω_2 engendrent un groupe isomorphe au groupe diédral D_4. Nous montrons maintenant le

Lemme 2.9. *Soient $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tels que $a > -\min(b, c, b + c)$, nous avons*

$$I(a, b, c) - I(\omega_i(a, b, c)) = \log\left(\frac{(a + b)^{a+b}(a + c)^{a+c}}{a^a(a + b + c)^{a+b+c}}\right) \quad \textit{pour } i = 1, 2.$$

En composant ω_1 et ω_2, nous avons

$$a\, e\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right) = (a + b + c)\, e\left(-\frac{b}{a + b + c}, -\frac{c}{a + b + c}\right).$$

Cette derniere relation signifie que le gain arithmétique obtenu à l'aide des polynômes proposés par les Chudnovsky peut être obtenu à l'aide de ceux considérés par Rukhadze et Dubitskas.

Preuve. Nous avons, par définition,

$$I(a,b,c) = a\int_{E\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right)} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

Nous faisons le changement de variable $x = ay$. La relation précédente devient

$$I(a,b,c) = \int_{F(a,b,c)} \frac{\mathrm{d}y}{y^2}$$

avec

$$F(a,b,c) = \Big\{ y > 0,\ 0 < \{ay\} + \{cy\} - 1 < 1 - \{by\} < \{ay\} \Big\}.$$

Nous allons d'abord étudier la quantité

$$I(a,b,c) - I(\omega_1(a,b,c)) = \int_{F(a,b,c)} \frac{\mathrm{d}y}{y^2} - \int_{F(\omega_1(a,b,c))} \frac{\mathrm{d}y}{y^2}.$$

Rappelons que

$$F(a,b,c) = \Big\{ y > 0,\ 1 < \{ay\} + \{by\}\,,\ 1 < \{ay\} + \{cy\}\,, \quad 1 < \{ay\} + \{by\} + \{cy\} < 2 \Big\}. \tag{2.15}$$

Soit $y \in F(\omega_1(a,b,c))$, nous avons donc

$$1 < \{(a+b)y\} + \{-by\}\,, \tag{2.16}$$

$$1 < \{(a+b)y\} + \{cy\}\,, \tag{2.17}$$

$$1 < \{(a+b)y\} + \{-by\} + \{cy\} < 2. \tag{2.18}$$

Nous savons que $\{-by\} \neq 0$ grâce à l'inégalité (2.16). Nous pouvons donc écrire $\{-by\} = 1 - \{by\}$. Les inégalités (2.16) et (2.18) deviennent alors respectivement

$$\{by\} < \{(a+b)y\} \tag{2.19}$$

et

$$\{(a+b)y\} - \{by\} + \{cy\} < 1.$$

Examinons $\{(a+b)y\}$. Nous avons soit $\{(a+b)y\} = \{ay\} + \{by\} - 1$, soit $\{(a+b)y\} = \{ay\} + \{by\}$. La première possibilité étant exclue du fait de (2.19), nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} F(\omega_1(a,b,c)) =& F(a+b,-b,c) \\ =& \Big\{ y > 0,\ \{ay\} + \{by\} < 1,\ \{ay\} + \{cy\} < 1, \\ & \qquad 1 < \{ay\} + \{by\} + \{cy\} < 2 \Big\}. \end{aligned}$$

Il est utile d'introduire les notations

$$\begin{aligned} g_1(y) &= \{ay\} + \{by\}\,, \\ g_2(y) &= \{ay\} + \{cy\}\,, \\ g_3(y) &= \{ay\} + \{by\} + \{cy\}\,. \end{aligned}$$

Notons que les ensembles $\{g_i = j\}$ pour $i = 1, 2, 3$ et $j = 0, 1, 2$ sont de mesure nulle. Soit E un ensemble. Nous désignons par χ_E la fonction caractéristique de E. Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} \int_{F(a,b,c)} \frac{\mathrm{d}y}{y^2} &= \int_0^{+\infty} \left(\chi_{\{1<g_1\}}\chi_{\{1<g_2\}}\chi_{\{1<g_3<2\}}\right)(y)\frac{\mathrm{d}y}{y^2} \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\chi_{\{1<g_1\}}\chi_{\{1<g_3<2\}} - \chi_{\{1<g_1\}}\chi_{\{g_2<1\}}\chi_{\{1<g_3<2\}}\right)(y)\frac{\mathrm{d}y}{y^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{F(\omega_1(a,b,c))} \frac{\mathrm{d}y}{y^2} &= \int_0^{+\infty} \left(\chi_{\{g_1<1\}}\chi_{\{g_2<1\}}\chi_{\{1<g_3<2\}}\right)(y)\frac{\mathrm{d}y}{y^2} \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\chi_{\{g_2<1\}}\chi_{\{1<g_3<2\}} - \chi_{\{1<g_1\}}\chi_{\{g_2<1\}}\chi_{\{1<g_3<2\}}\right)(y)\frac{\mathrm{d}y}{y^2}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$I(a,b,c) - I(\omega_1(a,b,c)) = \int_0^{+\infty} \left(\chi_{\{1<g_1\}}\chi_{\{1<g_3<2\}} - \chi_{\{g_2<1\}}\chi_{\{1<g_3<2\}}\right)(y)\frac{\mathrm{d}y}{y^2}.$$

Or, nous avons

$$\chi_{\{1<g_1\}}\chi_{\{1<g_3<2\}} = \chi_{\{1<g_1\}} - \chi_{\{2\le g_3\}},$$

et, de même,

$$\begin{aligned} \chi_{\{g_2<1\}}\chi_{\{1<g_3<2\}} &= \chi_{\{1<g_3<2\}} - \chi_{\{1\le g_2\}}\chi_{\{1<g_3<2\}} \\ &= \chi_{\{1<g_3<2\}} - \chi_{\{1\le g_2\}} + \chi_{\{2\le g_3\}}. \end{aligned}$$

Nous remarquons à cet endroit que, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$ privé d'un ensemble de mesure nulle, nous avons

$$\begin{aligned} \chi_{\{1<g_1\}}(y) &= \{ay\} + \{by\} - \{(a+b)y\}\,, \\ \chi_{\{1\le g_2\}}(y) &= \{ay\} + \{cy\} - \{(a+c)y\}\,, \\ \chi_{\{1<g_3<2\}}(y) + 2\chi_{\{2\le g_3\}}(y) &= \{ay\} + \{by\} + \{cy\} - \{(a+b+c)y\}\,. \end{aligned}$$

Ces trois relations nous permettent d'écrire $I(a,b,c) - I(\omega_1(a,b,c))$ sous la forme

$$\begin{aligned}
&I(a,b,c) - I(\omega_1(a,b,c)) \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\chi_{\{1<g_1\}} + \chi_{\{1\leq g_2\}} - \chi_{\{1<g_3<2\}} - 2\chi_{\{2\leq g_3\}}\right)(y)\frac{\mathrm{d}y}{y^2} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\{(a+b)y\} + \{(a+c)y\} - \{ay\} - \{(a+b+c)y\}}{y^2}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\{(a+b)y\} - (a+b)\{y\}}{y^2}\mathrm{d}y + \int_0^{+\infty} \frac{\{(a+c)y\} - (a+c)\{y\}}{y^2}\mathrm{d}y \\
&\quad - \int_0^{+\infty} \frac{\{ay\} - a\{y\}}{y^2}\mathrm{d}y - \int_0^{+\infty} \frac{\{(a+b+c)y\} - (a+b+c)\{y\}}{y^2}\mathrm{d}y.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, nous allons calculer l'intégrale $J_k = \int_0^{+\infty} \frac{\{ky\}-k\{y\}}{y^2}\mathrm{d}y$. Nous procédons comme suit

$$J_k = \sum_{q\in\mathbb{N}} \sum_{j=0}^{k-1} \int_{q+\frac{j}{k}}^{q+\frac{j+1}{k}} \frac{\{ky\} - k\{y\}}{y^2}\mathrm{d}y.$$

Nous faisons alors le changement de variable $y = q + (j+\theta)/k$. Nous obtenons donc

$$\begin{aligned}
J_k &= \sum_{q\in\mathbb{N}} \sum_{j=0}^{k-1} \int_0^1 \frac{-j}{\left(q+\frac{j+\theta}{k}\right)^2}\frac{\mathrm{d}\theta}{k} \\
&= \sum_{q\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{j}{q+\frac{j+1}{k}} - \frac{j}{q+\frac{j}{k}}\right) \\
&= -\sum_{j=1}^{k-1} j\left(\psi\left(\frac{j+1}{k}\right) - \psi\left(\frac{j}{k}\right)\right),
\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de la relation (2.12). Nous avons donc, pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$J_k = \sum_{j=1}^{k-1} \psi\left(\frac{j}{k}\right) - (k-1)\psi(1).$$

Nous rappelons maintenant une formule qui découle de la formule de multiplication de Gauss et Legendre et que l'on peut trouver énoncée à la page 16 de [Er]. Soit $z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re} z > 0$, soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, nous avons

$$\psi(kz) = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} \psi\left(z + \frac{j}{k}\right) + \log k.$$

Si nous donnons à z la valeur $1/k$, nous obtenons $J_k = k \log k$. Reprenons la relation (2.20). Elle devient maintenant

$$(2.21) \quad \begin{aligned} I(a,b,c) - I(\omega_1(a,b,c)) = (a+b)\log(a+b) + (a+c)\log(a+c) \\ - a\log a - (a+b+c)\log(a+b+c), \end{aligned}$$

ce qui était le résultat recherché.

Il nous reste maintenant à prouver que cette relation est aussi satisfaite si nous remplaçons ω_1 par ω_2. D'après son expression sous la forme (2.15), si a_1, b_1 et c_1 sont trois éléments de $\mathbb{Z}$ soumis aux hypothèses du lemme, nous avons $F(a_1,b_1,c_1) = F(a_1,c_1,b_1)$ ce qui entraîne $I(a_1,b_1,c_1) = I(a_1,c_1,b_1)$. Nous avons donc

$$I(a,b,c) - I(\omega_2(a,b,c)) = I(a,c,b) - I(\omega_1(a,c,b)).$$

Nous terminons la preuve en remarquant que la relation (2.21) est symétrique en b et c. $\square$

2.2.2 Calculs de mesures d'irrationalité de $\log 2$

Nous donnons maintenant les formules nécessaires au calcul d'une mesure d'irrationalité de $\log 2$. Rappelons que, pour $n \in \mathbb{N}$, la notation $\mathbb{Z}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et de degré inférieur ou égal à n.

Considérons, pour $n \in \mathbb{N}$, le polynôme

$$F_{a,b,c,n}(X) = \frac{1}{d_{\frac{b}{a},\frac{c}{a}}(an)} P_{an,bn,cn}(X) \in \mathbb{Z}_{an}[X]$$

où a est un entier naturel et b, c deux entiers relatifs tels que $a > -\min(b,c,b+c)$ et $abc \neq 0$. Par la suite, nous le noterons plus simplement $F_n(X)$.

Rappelons que d_{an} désigne le p.p.c.m. de $\{1, \ldots, an\}$. Nous avons

$$J_n = \int_0^1 \frac{F_n(x) - F_n(-1)}{1+x} \mathrm{d}x \in \frac{\mathbb{Z}}{d_{an}},$$

$$\begin{aligned} J_n + F_n(-1)\log 2 &= \int_0^1 \frac{F_n(x)}{1+x}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 Q_n(x)F_n(x)\mathrm{d}x + \frac{(-1)^{\beta n}}{2^{\gamma n}} \int_0^1 \frac{x^{\beta n}(1-x)^{\gamma n} F_n(x)}{1+x}\mathrm{d}x\,, \end{aligned}$$

où $\beta = \max(0,b), \gamma = \max(0,c)$ et

$$Q_n(X) = \frac{1 - 2^{-\gamma n}(-X)^{\beta n}(1-X)^{\gamma n}}{1+X} \in \frac{1}{2^{\gamma n}}\mathbb{Z}_{(\beta+\gamma)n-1}[X].$$

En posant, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$q_n = 2^{\gamma n} d_{(a+\beta+\gamma)n} F_n(-1)\,,$$

$$p_n = 2^{\gamma n} d_{(a+\beta+\gamma)n} \int_0^1 Q_n(x) F_n(x) \mathrm{d}x - 2^{\gamma n} d_{(a+\beta+\gamma)n} J_n$$

$$\text{et } \varepsilon_n = (-1)^{\beta n} d_{(a+\beta+\gamma)n} \int_0^1 \frac{x^{\beta n}(1-x)^{\gamma n} F_n(x)}{1+x} \mathrm{d}x\,,$$

nous obtenons $\varepsilon_n = q_n \log 2 - p_n$ avec $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$.

Étudions le comportement asymptotique de la suite (q_n). Soit C_r le cercle de rayon r centré en -1. La formule de Cauchy nous donne

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{d_{(a+\beta+\gamma)n} 2^{\gamma n}}{d_{\frac{b}{a},\frac{c}{a}}(an)} \oint_{C_r} \frac{z^{(a+c)n}(1-z)^{(a+b)n}}{(z+1)^{(a+b+c)n+1}} \frac{\mathrm{d}z}{2i\pi} \\ &= \frac{d_{(a+\beta+\gamma)n} 2^{\gamma n}}{d_{\frac{b}{a},\frac{c}{a}}(an)} \int_0^1 \frac{\left(-1+re^{2i\pi\theta}\right)^{(a+c)n}\left(2-re^{2i\pi\theta}\right)^{(a+b)n}}{\left(re^{2i\pi\theta}\right)^{(a+b+c)n}} \mathrm{d}\theta\,, \end{aligned}$$

pour tout $r > 0$. Nous avons donc

$$|q_n| \leq \frac{d_{(a+\beta+\gamma)n} 2^{\gamma n}}{d_{\frac{b}{a},\frac{c}{a}}(an)} r^{-(a+b+c)n}(1+r)^{(a+c)n}(2+r)^{(a+b)n} \qquad \text{pour tout } r > 0.$$

Nous en déduisons, grâce à l'égalité (2.4) et au Lemme 2.7,

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log |q_n|}{n} &\leq a + \beta + \gamma(1+\log 2) - ae\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right) \\ &\quad + \min_{r>0} \log(r^{-(a+b+c)}(1+r)^{a+c}(2+r)^{a+b}) \\ &= \sigma_{a,b,c}(\log 2)\,. \end{aligned}$$

La fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\}$ par

$$u_{a,b,c}(r) = \log\left(\frac{|1+r|^{a+c}|2+r|^{a+b}}{|r|^{a+b+c}}\right)$$

atteint son minimum en $r_0(a,b,c) = \left(2b + c + \sqrt{(c+2b)^2 + 8a(a+b+c)}\right)/2a$. Nous avons

$$\begin{aligned} u_{a,b,c}(r_0(a,b,c)) &= -a\log(2a) + (a+c)\log\left[2(a+b)+c+\sqrt{\Delta}\right] \\ &\quad + (a+b)\log\left[2(2a+b)+c+\sqrt{\Delta}\right] - (a+b+c)\log\left[2b+c+\sqrt{\Delta}\right] \end{aligned} \tag{2.22}$$

avec $\Delta = (c+2b)^2 + 8a(a+b+c)$.

Il reste à étudier le comportement de la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En intégrant $(a+b+c)n$ fois par parties, nous trouvons

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= \frac{(-1)^{\beta n} d_{(a+\beta+\gamma)n}}{d_{\frac{b}{a},\frac{c}{a}}(an)((a+b+c)n)!}\int_0^1 x^{(a+c)n}(1-x)^{(a+b)n}\left(\frac{x^{\beta n}(1-x)^{\gamma n}}{1+x}\right)^{((a+b+c)n)} \mathrm{d}x\\ &= \frac{2^{\gamma n} d_{(a+\beta+\gamma)n}}{d_{\frac{b}{a},\frac{c}{a}}(an)}\int_0^1 \frac{x^{(a+c)n}(1-x)^{(a+b)n}}{(1+x)^{(a+b+c)n+1}}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

puisque

$$\frac{x^{\beta n}}{1+x}(1-x)^{\gamma n} = \frac{(-1)^{\beta n}2^{\gamma n}}{1+x} - (-1)^{\beta n}2^{\gamma n}Q_n(x).$$

Les égalités (2.4) et (2.6) et le Lemme 2.7 nous donnent

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log|\varepsilon_n| &= a+\beta+\gamma(1+\log 2) - ae\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right) + \max_{0\le x\le 1}\log\left(\frac{x^{a+c}(1-x)^{a+b}}{(1+x)^{a+b+c}}\right)\\ &= -\,\tau_{a,b,c}(\log 2)\,.\end{aligned}$$

La fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1,-1\}$ par

$$(2.23)\qquad v_{a,b,c}(x) = \log\left(\frac{|x|^{a+c}|1-x|^{a+b}}{|1+x|^{a+b+c}}\right) = u_{a,b,c}(-1-x)$$

atteint son maximum en $x_0(a,b,c) = \frac{\sqrt{(2a+2b+c)^2+4a(a+c)}-2(a+b)-c}{2a}$ et vaut en ce point

$$\begin{aligned}(2.24)\quad v(x_0(a,b,c)) = &-a\log(2a) + (a+c)\log\left[-c-2(a+b)+\sqrt{\Delta}\right]\\ &+ (a+b)\log\left[2(2a+b)+c-\sqrt{\Delta}\right] - (a+b+c)\log\left[-c-2b+\sqrt{\Delta}\right]\end{aligned}$$

avec toujours $\Delta = (2b+c)^2+8a(a+b+c)$. Nous savons, grâce au Lemme 2.3, que le nombre $1+\sigma_{a,b,c}(\log 2)/\tau_{a,b,c}(\log 2)$ est une mesure d'irrationalité de $\log 2$.

Remarque 2.10. La méthode du col, que l'on peut voir exposée dans [Di], nous permet de montrer que la composante analytique intervenant dans la majoration de $\limsup_{n\to\infty}\log|q_n|/n$ par $\sigma_{a,b,c}(\log 2)$ est la meilleure possible.

Remarque 2.11. Les calculs que nous venons faire s'adaptent très bien aux nombres de la forme $\log(1+s/t)$ avec $s\in\mathbb{N}$ et $t\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ tels que $s/t\in]-1,1]$. Cela permet en particulier de retrouver le Théorème 2 de [HMAV]. Nous obtenons en fait

$$\begin{aligned}\sigma_{a,b,c}(\log(1+s/t)) = &a(1+\log|s|)+\beta(1+\log|t|)+\gamma(1+\log|s+t|)\\ &- a\,e\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right) + \min_{r>0}\log\left(\frac{\left(r+\left|\frac{t}{s}\right|\right)^{a+c}\left(r+\left|1+\frac{t}{s}\right|\right)^{a+b}}{r^{a+b+c}}\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\tau_{a,b,c}(\log(1+s/t)) =& a(1+\log|s|)+\beta(1+\log|t|)+\gamma(1+\log|s+t|) \\ & - a\, e\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right)+\max_{0\le x\le 1}\log\left(\frac{x^{a+c}(1-x)^{a+b}}{\left(x+\frac{t}{s}\right)^{a+b+c}}\right).\end{aligned}$$

2.2.2.1 Liens entre les mesures d'irrationalité données par les polynômes de Rukhadze, Dubitskas, Hata et Chudnovsky

Soient ω_1 et ω_2 les deux fonctions données par les formules (2.13) et (2.14). Nous établissons maintenant un résultat qui signifie notamment que toute mesure d'irrationalité de $\log 2$ trouvée à l'aide des polynômes de Chudnovsky peut être retrouvée à l'aide de ceux de Rukhadze et de ceux considérés par Hata.

Lemme 2.12. *Soient $a \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, b$ et $c \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ tels que $a > -\min(b,c,b+c)$, nous avons*

$$\mu_{\omega_i(a,b,c)}(\log 2) = \mu_{(a,b,c)}(\log 2) \quad pour \ \ i = 1,2.$$

Preuve. Nous allons tout d'abord montrer que $\sigma_{\omega_1(a,b,c)}(\log 2) = \sigma_{a,b,c}(\log 2)$. Nous savons par le Lemme 2.9 que nous avons

$$\begin{aligned}I(a,b,c)-I(\omega_1(a,b,c)) = &(a+b)\log(a+b)+(a+c)\log(a+c) \\ & -a\log a-(a+b+c)\log(a+b+c)\end{aligned}$$

où $I(a,b,c)$ désigne la quantité $a\, e\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right)$. Nous utilisons la formule (2.22) pour calculer $\min_{r>0} u_{a,b,c}(r) - \min_{r>0} u_{\omega_1(a,b,c)}(r)$ (rappelons que Δ désigne la quantité $(c+2b)^2+8a(a+b+c)$, qui est invariante sous l'action de ω_1) :

$$\begin{aligned}& u_{a,b,c}(r_0(a,b,c)) - u_{\omega_1(a,b,c)}(r_0(\omega_1(a,b,c))) \\ =& -a\log(2a)+(a+b)\log(2(a+b))+(a+b)\log\left(2(2a+b)+c+\sqrt{\Delta}\right) \\ & -a\log\left(2(2a+b)+c+\sqrt{\Delta}\right)+(a+c)\log\left(2(a+b)+c+\sqrt{\Delta}\right) \\ & +(a+c)\log\left(-2b+c+\sqrt{\Delta}\right)-(a+b+c)\log\left(2b+c+\sqrt{\Delta}\right) \\ & -(a+b+c)\log\left(2a+c+\sqrt{\Delta}\right) \\ =& \, b\log 2-a\log a+(a+b)\log(a+b)+b\log\left(2(2a+b)+c+\sqrt{\Delta}\right) \\ & -(a+b+c)\log\left(2(a+b+c)\left(2(2a+b)+c+\sqrt{\Delta}\right)\right) \\ & +(a+c)\log\left(2(a+c)\left(2(2a+b)+c+\sqrt{\Delta}\right)\right) \\ =& -a\log a+(a+b)\log(a+b)-(a+b+c)\log(a+b+c)+(a+c)\log(a+c).\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$u_{a,b,c}(r_0(a,b,c)) - I(a,b,c) = u_{\omega_1(a,b,c)}(r_0(\omega_1(a,b,c))) - I(\omega_1(a,b,c)).$$

Rappelons que, pour tout triplet (a,b,c) soumis aux conditions du lemme, nous avons

$$\sigma_{a,b,c}(\log 2) = a + \max(0,b) + \max(0,c)(1+\log 2) - I(a,b,c) + u_{a,b,c}(r_0(a,b,c)).$$

Il s'ensuit donc maintenant facilement que

$$\sigma_{a,b,c}(\log 2) = \sigma_{\omega_1(a,b,c)}(\log 2).$$

Nous pouvons montrer à l'aide de calculs semblables que

$$\tau_{a,b,c}(\log 2) = \tau_{\omega_1(a,b,c)}(\log 2).$$

De la même façon, nous prouvons

$$\mu_{\omega_2(a,b,c)}(\log 2) = \mu_{(a,b,c)}(\log 2).$$

□

Remarque 2.13. Là encore, les calculs que nous venons faire s'adaptent très bien aux nombres de la forme $\log(1+s/t)$ avec $s \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tels que $s/t \in]-1,1]$. Nous obtenons donc

$$\mu_{\omega_i(a,b,c)}(\log(1+s/t)) = \mu_{(a,b,c)}(\log(1+s/t)) \text{ pour } i = 1,2$$

avec $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, b$ et $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tels que $a > -\min(b,c,b+c)$.

2.2.2.2 Figures et résultats

Nous avons établi dans le paragraphe précédent les formules

$$\begin{aligned}(2.25)\quad \sigma_{a,b,c}(\log 2) = a + \beta + \gamma(1+\log 2) - ae\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right) - a\log(2a) \\ + (a+c)\log\left[2(a+b)+c+\sqrt{\Delta}\right] + (a+b)\log\left[2(2a+b)+c+\sqrt{\Delta}\right] \\ - (a+b+c)\log\left[2b+c+\sqrt{\Delta}\right]\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(2.26)\quad \tau_{a,b,c}(\log 2) = a\,e\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right) - a - \beta - \gamma(1+\log 2) + a\log(2a) \\ - (a+c)\log\left[-c-2(a+b)+\sqrt{\Delta}\right] \\ - (a+b)\log\left[2(2a+b)+c-\sqrt{\Delta}\right] + (a+b+c)\log\left[-c-2b+\sqrt{\Delta}\right]\end{aligned}$$

avec $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que $a > -\min(b, c, b+c)$, $\beta = \max(0, b), \gamma = \max(0, c)$, et enfin $\Delta = (c+2b)^2 + 8a(a+b+c)$.

Grâce à l'algorithme de calcul de l'intégrale que l'on trouve en 2.2.1.2, nous pouvons donc calculer explicitement la mesure d'irrationalité de $\log 2$ associée au choix de paramètres (a, b, c) (choix qui détermine la classe d'approximants du type (2.10) qui va être utilisée). Nous avons donc écrit un programme qui fonctionne sous GP, la calculette du système PARI [Pari]. Il associe à un triplet (a, b, c) convenable une mesure d'irrationalité de $\log 2$ calculée sous forme numérique à la précision souhaitée. D'autre part, en regardant les formules (2.25) et (2.26), il est facile de remarquer que nous avons $\mu_{(ka,kb,kc)} = \mu_{(a,b,c)}$ pour tous $a, k \in \mathbb{N}$ et $b, c \in \mathbb{Z}$ tels que $a > -\min(b, c, b+c)$. Cela nous autorise à faire notre paramétrage non plus sur des triplets d'entiers (a, b, c) mais sur des couples de nombres rationnels qui peuvent toujours s'écrire sous la forme $(a/b, a/c)$ avec a, b et c trois entiers relatifs premiers entre eux dans leur ensemble. Nous noterons $\mu_{a/b,a/c}(\log 2)$ la mesure d'irrationalité de $\log 2$ associée au triplet (a, b, c).

De plus, grâce au Lemme 2.12, nous savons que nous pouvons restreindre notre étude aux points rationnels $(a/b, a/c)$ avec a, b et $c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. En parcourant ce quart de plan, nous nous sommes aperçus que la zone la plus intéressante se trouvait autour du point $(6, 6)$. Nous avons donc procédé à une étude plus fine des mesures d'irrationalité obtenues au voisinage de ce point. Nous avons en fait calculé les mesures d'irrationalité en tous les points d'un maillage autour de $(6, 6)$ formé par les points de coordonnées

$$\mathcal{M}_{6,6} = \left(6 + \frac{j}{25} + \frac{k}{50}, 6 + \frac{j}{25} - \frac{k}{50}\right)_{j,k \in \mathbb{Z}, -25 \leq j \leq 25, -50 \leq k \leq 50}.$$

Nous obtenons ainsi la figure 2.1. C'est une figure en trois dimensions dans laquelle l'abscisse est le rapport a/b, l'ordonnée vaut a/c et la hauteur est égale à l'opposée (pour donner une meilleure visibilité) de la mesure d'irrationalité associée. La figure 2.1 représente une surface d'interpolation des points

$$(x, y, \mu_{x,y}(\log 2))_{(x,y) \in \mathcal{M}_{6,6}}.$$

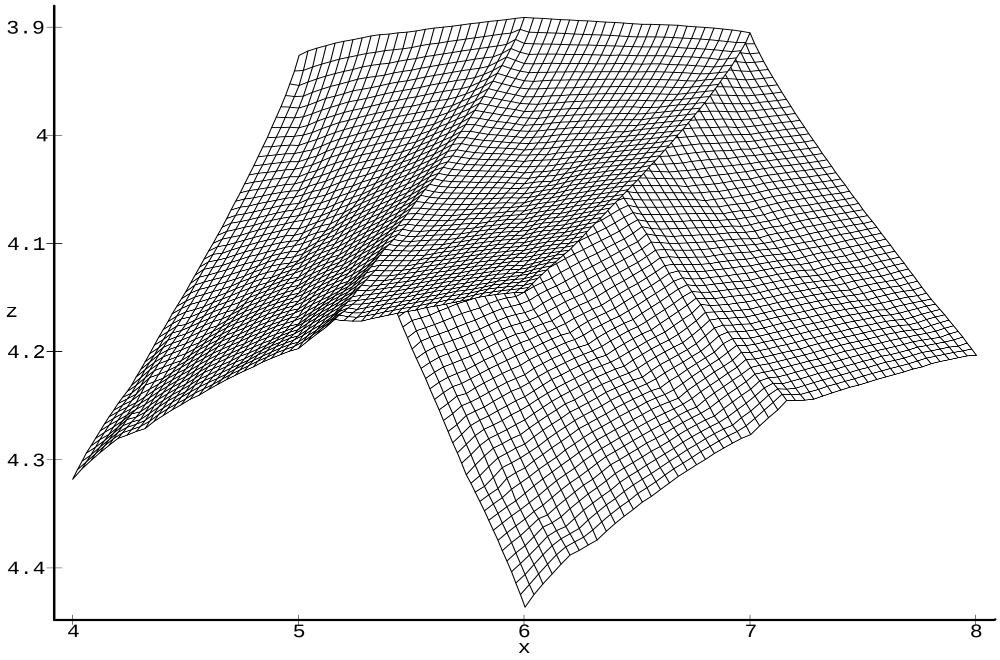

Figure 2.1. Mesures d'irrationalité de $\log 2$ autour du triplet (6,1,1).

Nous voyons se dégager nettement sur cette surface une ligne de crête qui correspond aux valeurs obtenues en des points de la demi-droite d'équation $\{y = x, x > 0\}$. Nous restreignons maintenant notre étude à celle des points de la forme $(a/b, a/b)$ avec $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Soit $j \in \mathbb{N}$, posons $x_j = 2 + j/14000$. Observons maintenant la figure 2.2. C'est une figure en deux dimensions sur laquelle le nombre rationnel a/b est en abscisse et la mesure d'irrationalité $\mu_{a,b,b}$ se trouve en ordonnée pour la première. Elle représente une courbe d'interpolation des points de coordonnées $(x_j, \mu_{x_j,x_j}(\log 2))_{0 \leq j \leq 14000}$. Le minimum visible sur cette courbe est atteint au point $(6, 6)$.

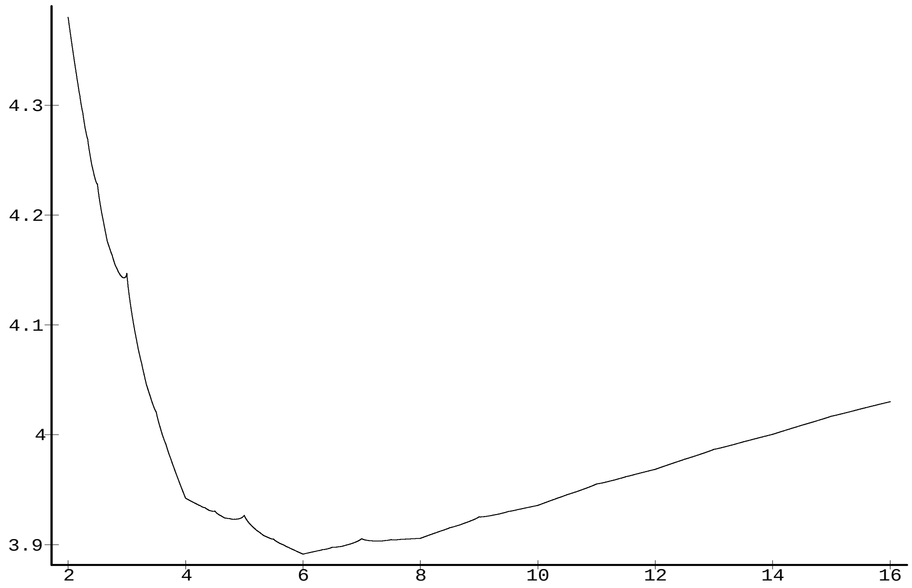

Figure 2.2. Mesures d'irrationalité de $\log 2$ obtenues aux points $(\nu, \nu), \nu \in \mathbb{Q} \cap [2, 16]$.

Finalement, les meilleures mesures d'irrationalité trouvées correspondent aux choix de paramètres $(8, -1, -1), (7, 1, -1), (6, 1, 1)$ et $(7, -1, 1)$. Le premier triplet correspond au choix de paramètres fait par E. A. Rukhadze [Ruk], nous avons alors

$$\mu_{8,-1,-1} = 1 + \frac{\log(2\alpha) + \beta}{\log \alpha - \beta}$$

avec

$$\alpha = 2^{-11}(153333125 + 7734633\sqrt{393})$$

et

$$\beta = 8 - \pi \left(\frac{1}{2} - \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \right).$$

Numériquement, $\mu_{8,-1,-1} = 3,8913997...$. Le triplet $(7, 1, -1)$ considéré par Hata dans [Hat1] donne la même mesure d'irrationalité et nous retrouvons aussi cette valeur en faisant les choix $(6, 1, 1)$ et $(7, -1, 1)$ (ce qui est normal d'après le Lemme 2.12). Le polynôme $P_{6n,n,n}$ associé au premier de ces deux derniers choix correspond au polynôme

$$C_{6n,n}(z) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} L_{6n}(z)$$

(où L_n désigne le n-ième polynôme de Legendre) exhibé par les Chudnovsky dans [Chu4]. En fait, nous avons $C_{6n,n} = \binom{7n}{n} P_{6n,n,n}$. Assez curieusement, ils affirment qu'en utilisant un simple paramétrage à une dimension et le calcul du contenu de ces polynômes, ils trouvent une mesure d'irrationalité égale à $3,87...$ alors que nous n'avons pu, en utilisant de façon optimale (cf. les remarques 2.8 et 2.10) les mêmes méthodes, que retrouver le résultat de Rukhadze et Hata. Le Lemme 2.12 nous indique d'ailleurs que nous ne pouvons pas nous attendre à mieux...

2.2.3 Calculs de mesures d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$

Nous utilisons de nouveau la classe de polynômes

$$F_n(X) = \frac{1}{d_{\frac{b}{a},\frac{c}{a}}(an)} P_{an,bn,cn}(X) \in \mathbb{Z}_{an}[X]$$

avec $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tels que $a > -\min(b, c, b+c)$.

Alors nous avons

$$J_n = \int_0^1 \frac{F_n(x) - F_n\big(e^{\frac{i\pi}{3}}\big)}{x - e^{\frac{i\pi}{3}}} \mathrm{d}x \in \frac{1}{d_{an}}(\mathbb{Z} + j\mathbb{Z})$$

où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et

$$\begin{aligned} J_n + F_n\big(e^{\frac{i\pi}{3}}\big)\frac{i\pi}{3} &= \int_0^1 \frac{F_n(x)}{x - e^{\frac{i\pi}{3}}} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 Q_n(x) F_n(x) \mathrm{d}x + \underbrace{\frac{(e^{-\frac{i\pi}{3}})^{\beta n}}{(1 - e^{\frac{i\pi}{3}})^{\gamma n}} \int_0^1 \frac{x^{\beta n}(1-x)^{\gamma n} F_n(x)}{x - e^{\frac{i\pi}{3}}} \mathrm{d}x}_{v_n} \end{aligned}$$

avec $\beta = \max(0, b), \gamma = \max(0, c)$ et

$$Q_n(X) = \frac{1 - (-j)^{(\beta-\gamma)n} X^{\beta n}(1-X)^{\gamma n}}{X - e^{\frac{i\pi}{3}}} \in (\mathbb{Z} + j\mathbb{Z})_{(\beta+\gamma)n-1}[X].$$

En posant, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$q_n = i\sqrt{3}\, d_{(a+\beta+\gamma)n} F_n\big(e^{\frac{i\pi}{3}}\big),$$

$$p_n = 3\, d_{(a+\beta+\gamma)n} \left(\int_0^1 Q_n(x) F_n(x) \mathrm{d}x - J_n \right)$$

$$\text{et } \varepsilon_n = 3\, d_{(a+\beta+\gamma)n} v_n,$$

nous obtenons $\varepsilon_n = q_n \frac{\pi}{\sqrt{3}} - p_n$, avec $p_n, q_n \in \mathbb{Z} + j\mathbb{Z}$.

Examinons le comportement asymptotique de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La formule de Cauchy nous donne

$$q_n = i\sqrt{3}\frac{d_{(a+\beta+\gamma)n}}{d_{\frac{b}{a},\frac{c}{a}}(an)}\oint_C \frac{z^{(a+c)n}(1-z)^{(a+b)n}}{(z-e^{\frac{i\pi}{3}})^{(a+b+c)n+1}}\frac{\mathrm{d}z}{2i\pi}$$

où C est le cercle unité centré en $e^{\frac{i\pi}{3}}$. En posant $z = e^{\frac{i\pi}{3}}(1-e^{2i\theta})$, nous avons donc

$$|q_n| \leq \sqrt{3}\,\frac{d_{(a+\beta+\gamma)n}2^{(2a+b+c)n}}{d_{\frac{b}{a},\frac{c}{a}}(an)}\max_{0\leq\theta\leq\pi}\left(\sin\theta^{(a+c)n}\left|\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\right|^{(a+b)n}\right).$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to+\infty}\frac{\log|q_n|}{n} &\leq a+\beta+\gamma+(2a+b+c)\log 2 - a\,e\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right)+\max_{0\leq\theta\leq\pi}g_{a,b,c}(\theta)\\ &= \sigma_{a,b,c}\left(\pi/\sqrt{3}\right),\end{aligned}$$

la fonction $g_{a,b,c}$ étant définie par la relation

$$g_{a,b,c}(\theta) = (a+c)\log|(\sin\theta)| + (a+b)\log\left|\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\right|.$$

Sur l'intervalle $[0,\pi]$, elle ne peut atteindre ses extrema qu'aux points

$$\theta_0(a,b,c) = \frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{c-b}{2(2a+b+c)}\right)$$

et

$$\theta_1(a,b,c) = \frac{7\pi}{12}-\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{c-b}{2(2a+b+c)}\right).$$

En effet, comme $a > -\min(b,c,b+c)$, nous voyons facilement que la fraction $(c-b)/2(2a+b+c)$ appartient à l'intervalle $]-1/2,1/2[$. Par conséquent, le nombre réel $\arcsin((c-b)/(2a+b+c))$ se trouve dans l'intervalle $]-\pi/6,\pi/6[$. Nous en déduisons que $\theta_0(a,b,c)$ appartient à $]0,\pi/6[$ et que $\theta_1(a,b,c)$ est un élément de $]\pi/2,2\pi/3[$.

Il reste à étudier le comportement de la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nous intégrons ε_n par parties $(a+b+c)n$ fois. Nous trouvons

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= \frac{3d_{(a+\beta+\gamma)n}\,(e^{-\frac{i\pi}{3}})^{\beta n}}{(1-e^{\frac{i\pi}{3}})^{\gamma n}d_{\frac{b}{a},\frac{c}{a}}(an)}\int_0^1\frac{x^{(a+c)n}(1-x)^{(a+b)n}}{((a+b+c)n)!}\left(\frac{x^{\beta n}(1-x)^{\gamma n}}{x-e^{\frac{i\pi}{3}}}\right)^{((a+b+c)n)}\mathrm{d}x\\ &= \frac{3\,d_{(a+\beta+\gamma)n}}{d_{\frac{b}{a},\frac{c}{a}}(an)}\int_0^1\frac{x^{(a+c)n}(1-x)^{(a+b)n}}{(x-e^{\frac{i\pi}{3}})^{(a+b+c)n+1}}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

puisque le polynôme $Q_n(x)$ est de degré $(\beta+\gamma)n-1$ et que $\beta+\gamma \leq a+b+c$ (rappellons que $a > -\min(b,c,b+c)$). Nous en déduisons, après avoir remplacé le contour d'intégration initial par le plus petit arc de cercle de centre $e^{\frac{i\pi}{3}}$ joignant 0 à 1,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log|\varepsilon_n| \leq a+\beta+\gamma+(2a+b+c)\log 2 - ae\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right) + \max_{0\leq\theta\leq\frac{\pi}{6}} g_{a,b,c}(\theta)$$
$$= -\,\tau_{a,b,c}\left(\pi/\sqrt{3}\right).$$

Le maximum de $g_{a,b,c}$ sur l'intervalle $[0,\pi/6]$ est atteint en $\theta_0(a,b,c)$.

Nous montrons exactement de la même façon que dans la fin de la preuve du Théorème 4.2 de [Hat1] que nous pouvons bien appliquer le Lemme 2.4. Nous savons alors que le nombre $1+\sigma_{a,b,c}\left(\pi/\sqrt{3}\right)/\tau_{a,b,c}\left(\pi/\sqrt{3}\right)$ est une mesure d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$.

Remarque 2.14. La méthode du col [Di] nous donne que les composantes analytiques intervenant dans les majorations des quantités $\limsup_{n\to\infty}\log|q_n|/n$ et $\limsup_{n\to\infty}\log|\varepsilon_n|/n$ par $\sigma_{a,b,c}\left(\pi/\sqrt{3}\right)$ et $-\tau_{a,b,c}\left(\pi/\sqrt{3}\right)$ respectivement sont les meilleures possibles.

2.2.3.1 Liens entre les mesures d'irrationalité données par les polynômes de Rukhadze, Dubitskas, Hata et Chudnovsky

Nous allons maintenant montrer un résultat qui va nous permettre de restreindre notre champ de paramètres (a,b,c) à étudier.

Lemme 2.15. *Soient $a\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, b et $c\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ tels que $a>-\min(b,c,b+c)$, nous avons*

$$\mu_{(a,b,c)}\left(\pi/\sqrt{3}\right) = \mu_{\omega_1\omega_2(a,b,c)}\left(\pi/\sqrt{3}\right) = \mu_{(a+b+c,-b,-c)}\left(\pi/\sqrt{3}\right).$$

Cela signifie en particulier que toute mesure d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$ trouvée à l'aide des polynômes de Chudnovsky peut être retrouvée à l'aide de ceux de Rukhadze.

Preuve. Nous avons clairement les égalités

$$\theta_0(a+b+c,-b,-c) = \frac{\pi}{6} - \theta_0(a,b,c)$$

et

$$\theta_1(a+b+c,-b,-c) = \pi + \frac{\pi}{6} - \theta_1(a,b,c).$$

Nous en déduisons que

$$g_{a+b+c,-b,-c}(\theta_i(a+b+c,-b,-c)) = g_{a,b,c}(\theta_i(a,b,c)) \text{ pour } i=0,1.$$

Les formules

$$\sigma_{a,b,c}\left(\pi/\sqrt{3}\right) = a+\beta+\gamma+(2a+b+c)\log 2 - a\,e\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right) + \max_{0\le\theta\le\pi} g_{a,b,c}(\theta),$$
$$\tau_{a,b,c}\left(\pi/\sqrt{3}\right) = a\,e\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right) - a-\beta-\gamma-(2a+b+c)\log 2 - \max_{0\le\theta\le\frac{\pi}{6}} g_{a,b,c}(\theta)$$

et le Lemme 2.9 nous donnent alors les égalités $\sigma_{a+b+c,-b,-c}\left(\pi/\sqrt{3}\right) = \sigma_{a,b,c}\left(\pi/\sqrt{3}\right)$ et $\tau_{a+b+c,-b,-c}\left(\pi/\sqrt{3}\right) = \tau_{a,b,c}\left(\pi/\sqrt{3}\right)$. □

2.2.3.2 Figures et résultats

Nous pouvons calculer explicitement la mesure d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$ associée au choix de paramètres (a,b,c). Nous devons procéder à une simple adaptation du programme GP écrit pour $\log 2$. Le point un peu délicat qui est celui du calcul de l'intégrale $e(b/a,c/a)$ étant déjà implanté, il nous faut juste entrer les formules donnant les maxima de $g_{a,b,c}(\theta)$ sur $[0,\pi]$ et sur $[0,\pi/6]$. Ce programme donne donc une mesure d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$ calculée sous forme numérique à la précision souhaitée à partir des paramètres (a,b,c).

Nous constatons, en regardant les expressions de $\sigma_{a,b,c}\left(\pi/\sqrt{3}\right)$ et $\tau_{a,b,c}\left(\pi/\sqrt{3}\right)$ que $\mu_{(ka,kb,kc)} = \mu_{(a,b,c)}$ pour tous $a,k\in\mathbb{N}$ et $b,c\in\mathbb{Z}$ tels que $a > -\min(b,c,b+c)$. Ce fait ajouté au résultat donné par le Lemme 2.15 nous permet de faire un paramétrage non plus sur des triplets d'entiers (a,b,c) mais sur des couples de nombres rationnels qui peuvent toujours s'écrire sous la forme $(a/b,a/c)$ avec $a,b\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $c\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ tels que $a>-c$.

Le parcours de ces deux quarts de plan nous permet de constater que les zones les plus intéressantes se trouvent autour des points $(4,4)$ et $(6,-6)$. Nous avons donc procédé à une étude plus fine des mesures d'irrationalité obtenues au voisinage de ces points. Nous avons calculé les mesures d'irrationalité en tous les points d'un maillage autour de $(4,4)$ formé par les points de coordonnées

$$\mathcal{M}_{4,4} = \left(4+\frac{j}{25}+\frac{k}{50}, 4+\frac{j}{25}-\frac{k}{50}\right)_{j,k\in\mathbb{Z},-25\le j\le 25,-50\le k\le 50}$$

et d'un autre maillage autour de $(6,-6)$ formé par les points de coordonnées

$$\mathcal{M}_{5,-5} = \left(5+\frac{j}{50}+\frac{k}{25}, -5+\frac{j}{50}-\frac{k}{25}\right)_{j,k\in\mathbb{Z},-50\le j\le 50,-25\le k\le 25}.$$

Nous obtenons ainsi les figures 2.3 et 2.4. Ce sont des figures en trois dimensions dans laquelle l'abscisse est le rapport a/b, l'ordonnée vaut a/c et la hauteur est égale à l'opposée (pour donner une meilleure visibilité) de la mesure d'irrationalité associée. La figure 2.3 (respectivement la figure 2.4) représente une surface d'interpolation des points $(x, y, \mu_{x,y}(\pi/\sqrt{3}))_{(x,y)\in\mathcal{M}_{4,4}}$ (respectivement $(x, y, \mu_{x,y}(\pi/\sqrt{3}))_{(x,y)\in\mathcal{M}_{5,-5}}$).

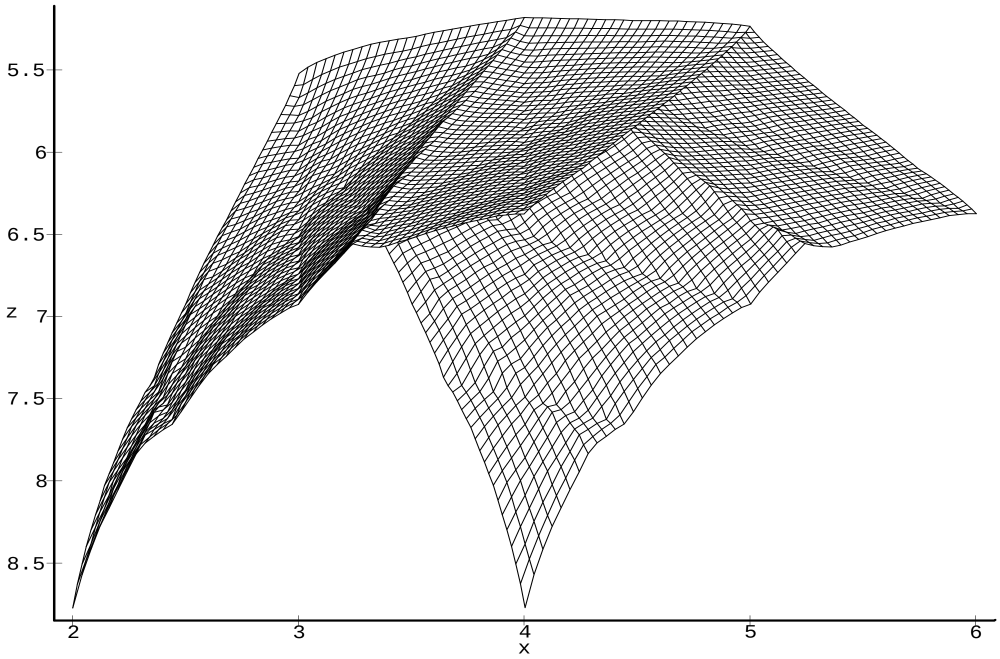

Figure 2.3. Mesures d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$ autour du triplet (4,1,1).

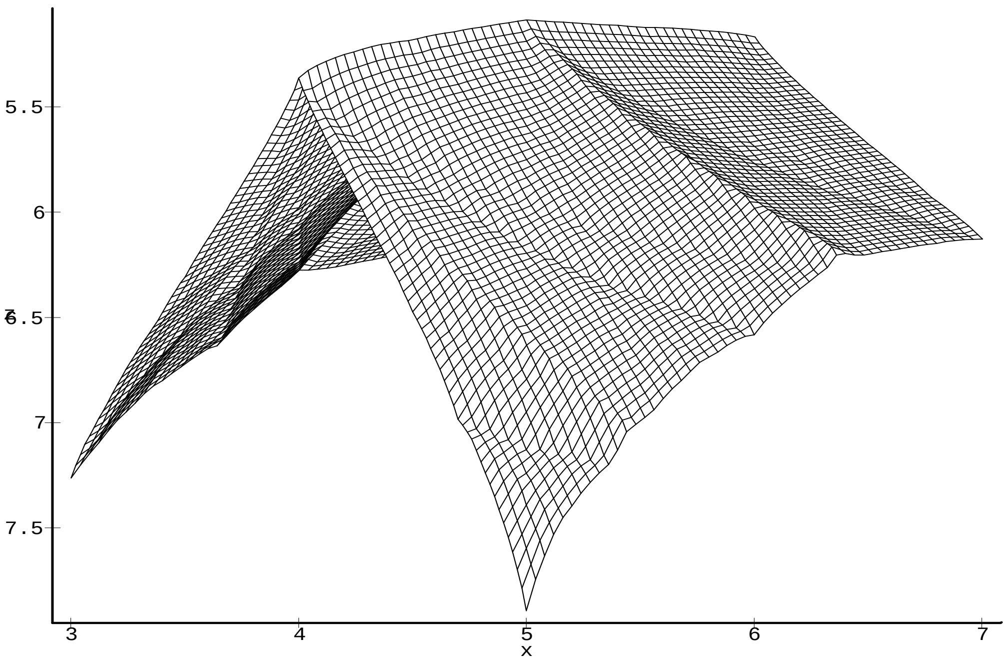

Figure 2.4. Mesures d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$ autour du triplet (5,1,-1).

Ici aussi, les meilleures valeurs correspondent apparemment à celles obtenues aux points rationnels des demi-droites d'équation $\{y = x, x > 0\}$ et $\{y = -x, x < 0\}$. Nous restreignons maintenant notre étude à celle des points de la forme $(a/b, a/c)$ avec $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $c = \pm b$ tels que $a > -c$. Soit $j \in \mathbb{N}$, posons $x_j = 2 + j/14000$. Observons maintenant les figures 2.5 et 2.6. Ce sont des figures en deux dimensions sur lesquelles le nombre rationnel a/b est en abscisse et la mesure d'irrationalité $\mu_{a,b,b}$ se trouve en ordonnée pour la première, le nombre réel $\mu_{a,b,-b}$ se trouvant en ordonnée pour la seconde. Elles représentent les courbes d'interpolation des points de coordonnées

$$(x_j, \mu_{x_j,x_j}(\log 2))_{0 \leq j \leq 14000}$$

pour la figure 2.5 et

$$(x_j, \mu_{x_j,-x_j}(\log 2))_{1000 \leq j \leq 14000}$$

pour la figure 2.6. Les minima visibles sur ces courbes sont atteints aux points $(4, 4)$ et $(5, -5)$.

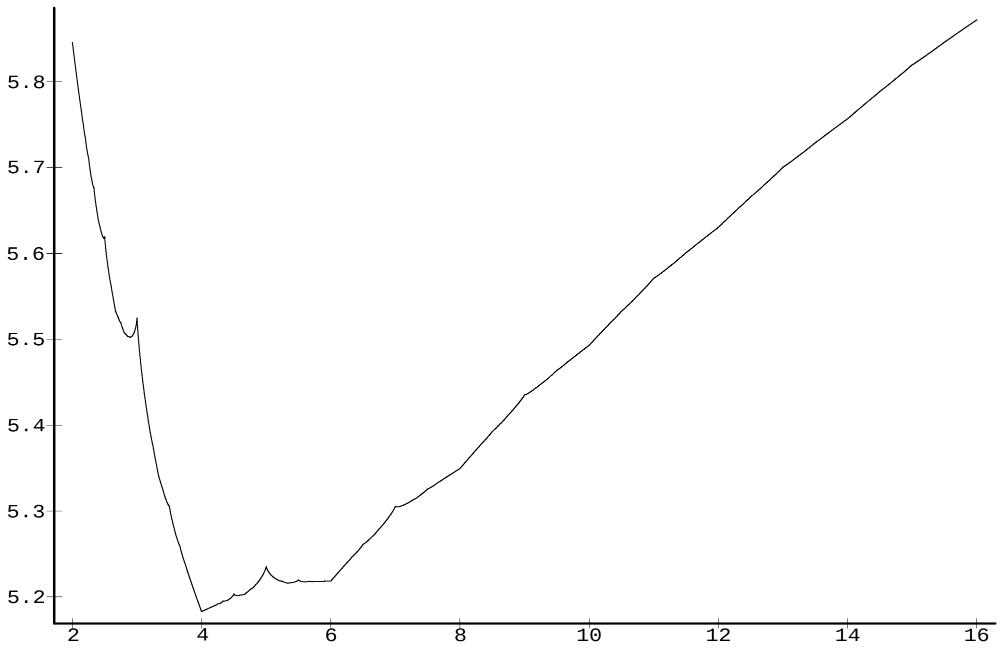

Figure 2.5. Mesures d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$ obtenues aux points $(\nu, \nu), \nu \in \mathbb{Q} \cap [2, 16]$.

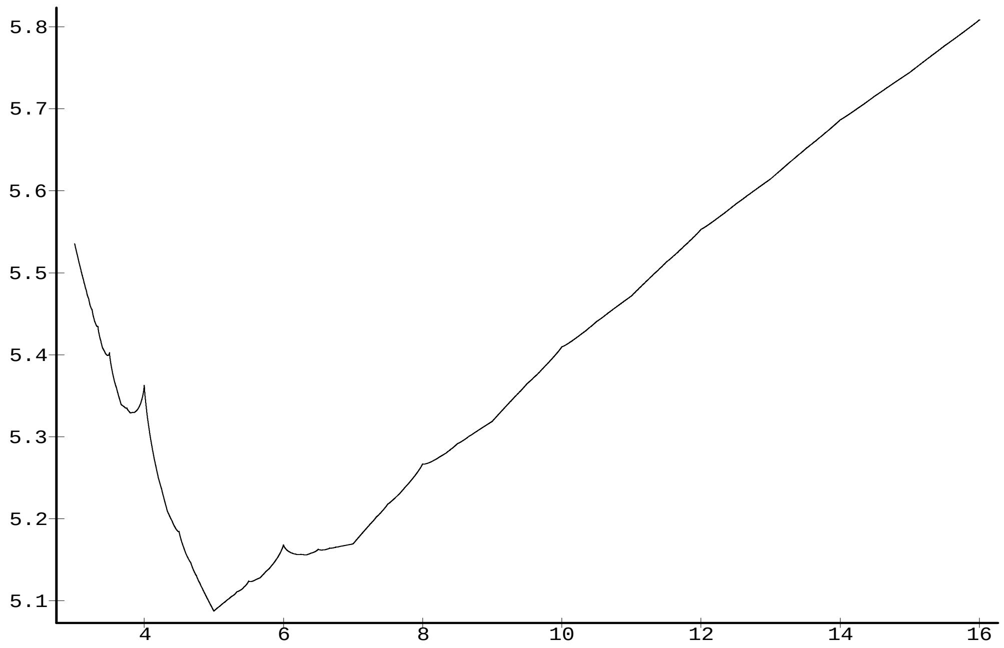

Figure 2.6. Mesures d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$ obtenues aux points $(\nu, -\nu), \nu \in \mathbb{Q} \cap [3, 16]$.

Les meilleures mesures d'irrationalité que nous trouvons sont celles associées aux choix de paramètres $(5, 1, -1)$ et $(5, -1, 1)$, le premier ayant été fait par Hata dans [Hat1]. Il obtient alors la valeur

$$\mu_{5,1,-1} = 1 + \frac{\log \alpha_1 + \beta_1}{\log \alpha_1 - \beta_1}$$

avec

$$\alpha_1 = 2^{-2}(1327 + 231\sqrt{33})$$

et

$$\beta_1 = 6 - \pi \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} \right).$$

Nous avons numériquement $\mu_{5,1,-1} = 5.0874625...$.

A. K. Dubitskas obtenait 5.516 dans [Dub1] puis 5.2 dans [Dub2] à l'aide du choix de paramètres $(6, -1, -1)$. En fait, la meilleure valeur que l'on peut obtenir à l'aide de ce triplet est

$$\mu_{6,-1,-1} = 1 + \frac{\log \alpha_2 + \beta_2}{\log \alpha_2 - \beta_2} = 5.18300789...$$

avec

$$\alpha_2 = 362 + 209\sqrt{3}$$

et

$$\beta_2 = 6 - \pi\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}\right) - \log(2^{-7}3^{-3}5^5).$$

D. V. et G. V. Chudnovsky disent dans [Chu4] avoir obtenu la valeur 4.96, toujours en considérant un simple paramétrage à une dimension des polynômes $P_{n,m,m}$ (avec m positif) et le calcul du contenu de ces polynômes. Dans ce cas-là, la meilleure valeur que nous ayons pu trouver est celle associée au triplet (4,1,1) et, en vertu du Lemme 2.15, elle donne la même valeur que celle correspondant au choix de paramètres de Dubitskas. Rappelons que, d'après les remarques 2.8 et 2.14, les méthodes utilisées ici le sont de façon optimale. De plus, le Lemme nous dit que

Bien sûr, il nous faut mentionner que depuis, Hata [Hat2] a obtenu par d'autres techniques 4.6016 qui est la meilleure mesure d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$ calculée à ce jour.

2.3 Tentative d'amélioration analytique

2.3.1 Introduction

Dans cette partie, nous allons introduire une classe de polynômes dérivée de la classe (2.10) afin d'essayer d'améliorer la meilleure mesure d'irrationalité de $\log 2$. Nous ne travaillerons pas sur $\pi/\sqrt{3}$ car, comme nous venons de le dire, la meilleure valeure obtenue à ce jour (4.6016) est trop loin de celle obtenue à l'aide des polynômes (2.10), à savoir 5.0874, pour espérer être atteinte à l'aide des légères améliorations que notre tentative pourrait apporter.

Dans la première partie, nous avons utilisé des suites de polynômes avec un contenu élevé. Nous n'avons alors procédé qu'à des améliorations d'ordre arithmétique. Ici, nous allons essayer d'introduire des améliorations analytiques en faisant intervenir des facteurs polynomiaux correcteurs. Le rôle de ces facteurs est de faire diminuer la taille du minimum de la fonction intervenant dans le calcul du dénominateur τ afin de faire croître ce dernier. Pour cela, nous allons considérer la classe de polynômes

(2.27)
$$U_{n,m,m',s,t}(X) = \frac{1}{(2n+2m+m')!}\left[(X(1-X))^{2n+m}(s-tX)^{m'}\right]^{(2n+2m+m')}$$

avec n et m' dans $\mathbb{N}$ et m, s et t dans $\mathbb{Z}$ tels que $2n \geq -\min(m, 2m+m')$. Clairement, le polynôme $U_{n,m,m',s,t}(X)$ appartient à $\mathbb{Z}_{2n}[X]$. Si m' vaut 0, nous retrouvons les polynômes $P_{2n,m,m}$ de la première partie. Nous avons

$$U_{n,m,m',s,t}(X) = \sum_{k_1=0}^{2n} \sum_{k_2=-\min(k_1,m')}^{0} (-1)^{k_1+k_2+m+m'} t^{k_2+m'} s^{-k_2} C_{n,m,m',k_1,k_2} X^{k_1+k_2}$$

où

$$C_{n,m,m',k_1,k_2} = \binom{2n+m}{k_1+m}\binom{m'}{k_2+m'}\binom{2n+2m+m'+k_1+k_2}{2n+2m+m'}.$$

Comme dans la première partie, nous allons d'abord procéder à une étude du contenu de ces polynômes.

2.3.2 Un lemme arithmétique

Lemme 2.16. *Soient λ, λ' deux nombres réels tels que $\lambda \geq -2$, $\lambda' \geq -2\min(0, \lambda+1)$, soient M et M' deux suites d'entiers positifs telles que*

$$\max\{|\lambda n - M(n)|, |\lambda' n - M'(n)|\} \leq C_{\lambda,\lambda'}$$

où $C_{\lambda,\lambda'}$ est une constante positive indépendante de n. Alors il existe un diviseur commun $d_{\lambda,\lambda',n}$ des coefficients de $U_{n,M(n),M'(n),s,t}$ tel que

$$f(\lambda,\lambda') := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log d_{\lambda,\lambda',n} = \int_{F(\lambda,\lambda')} \frac{\mathrm{d}x}{x^2},$$

où $F(\lambda,\lambda')$ est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts définie par

$$F(\lambda,\lambda') = F_1(\lambda,\lambda') \cup F_2(\lambda,\lambda')$$

où

$$F_1(\lambda,\lambda') = \left\{x > 0, \{x\} < \frac{1}{2} \textit{ et } 1 + \{\lambda x\} < 2\{x\} + 2\{\lambda x\} < 2 - \{\lambda' x\}\right\}$$

et

$$F_2(\lambda,\lambda') = \left\{x > 0,\ 2 + \{\lambda x\} < 2\{x\} + 2\{\lambda x\} < 3 - \{\lambda' x\}\right\}.$$

Preuve. Le schéma de la preuve est identique à celui de la preuve du Lemme 2.7. Posons $\delta_n = \frac{C_{\lambda,\lambda'}}{\sqrt{(4+2\lambda+\lambda')n+1}}$. Pour n assez grand, nous avons $\delta_n < \frac{1}{6}$. Posons aussi

$$F_{1,n}(\lambda,\lambda') = \Big\{x > 0, 1 - \{\lambda x\} + \delta_n < 2\{x\}$$
$$< \min(2(1-\{\lambda x\}) - \{\lambda' x\}, 1) - 3\delta_n \text{ et } \{\lambda' x\} > 2\delta_n\Big\},$$

$$F_{2,n}(\lambda,\lambda') = \Big\{ x > 0, 2 - \{\lambda x\} + 2\delta_n < 2\{x\} < 3 - 2\{\lambda x\} - \{\lambda' x\} - 3\delta_n \text{ et } \{\lambda' x\} > 2\delta_n \Big\}$$

et

$$F_n(\lambda,\lambda') = F_{1,n}(\lambda,\lambda') \cup F_{2,n}(\lambda,\lambda').$$

Considérons les trois suites $\left(\frac{k}{\lambda}\right)_{k\in\mathbb{N}}, \left(\frac{l}{\lambda'}\right)_{l\in\mathbb{N}}, (q)_{q\in\mathbb{N}}$ dont nous rangeons les éléments dans un ordre croissant. Nous obtenons alors une suite croissante $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de nombres réels. Il est alors clair que sur $]a_m, a_{m+1}[$, les fonctions $x \mapsto 1 - \{\lambda x\} - 2\{x\} + \delta_n$, $x \mapsto \min(2(1-\{\lambda x\}) + \{\lambda' x\}, 1) - 2\{x\} - \delta_n$, $x \mapsto 2 - \{\lambda x\} - 2\{x\} + \delta_n$ et $x \mapsto 3 - 2\{\lambda x\}) - \{\lambda' x\} - \delta_n$ sont affines donc a fortiori continues ce qui montre que $I_{n,m,\lambda,\lambda'} = F_n(\lambda,\lambda') \cap]a_m, a_{m+1}[$ est ouvert. Cela entraîne que $F_n(\lambda,\lambda')$ est ouvert puisqu'il ne contient aucun des éléments de la suite $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$. De plus, il est clair que la suite $(F_n(\lambda,\lambda'))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n(\lambda,\lambda') = F(\lambda,\lambda')$. Posons

$$H_n = \left\{ p \text{ premiers tels que } p \geq \sqrt{(4+2\lambda+\lambda')n+1} \text{ et } \frac{n}{p} \in F_n(\lambda,\lambda') \right\}$$

et

$$d_{\lambda,\lambda',n} = \prod_{p\in H_n} p.$$

Nous allons montrer que tout élément p de H_n divise les coefficients du polynôme $U_{n,M(n),M'(n),s,t}$, i.e. pour tout entier k_1 appartenant à l'intervalle $[0,2n]$ et pour tout entier k_2 appartenant à l'intervalle $[-\min(k_1,m'),0]$, le nombre premier p divise C_{n,m,m',k_1,k_2}. Soient k_1 un entier de $[-m,2n]$ et k_2 un entier de $[-m',0]$, nous notons

$$\alpha = \left\{\frac{n}{p}\right\}, \beta = \left\{\frac{M(n)}{p}\right\}, \gamma = \left\{\frac{M'(n)}{p}\right\}, \theta_1 = \left\{\frac{k_1}{p}\right\} \text{ et } \theta_2 = \left\{\frac{k_2}{p}\right\}.$$

L'exposant de p dans C_{n,m,m',k_1,k_2} que l'on notera v_p dans la suite de la preuve vaut

$$[2\alpha+\beta] - [\beta+\theta_1] - [2\alpha-\theta_1] - [\gamma+\theta_2] - [-\theta_2] + [2\alpha+2\beta+\gamma+\theta_1+\theta_2] - [2\alpha+2\beta+\gamma] - [\theta_1+\theta_2].$$

Comme $\frac{n}{p}$ appartient à $F_n(\lambda,\lambda')$, les nombres $\left\{\frac{\lambda n}{p}\right\}$ et $\left\{\frac{\lambda' n}{p}\right\}$ sont dans l'intervalle $]2\delta_n, 1-2\delta_n[$. Nous avons aussi

$$\max\left\{ \left|\frac{\lambda n}{p} - \frac{M(n)}{p}\right|, \left|\frac{\lambda' n}{p} - \frac{M'(n)}{p}\right| \right\} \leq \frac{C_{\lambda,\lambda'}}{p} \leq \frac{C_{\lambda,\lambda'}}{\sqrt{(4+2\lambda+\lambda')n+1}} = \delta_n.$$

Nous en déduisons les inégalités

$$\left|\left\{\frac{\lambda n}{p}\right\} - \beta\right| \leq \delta_n \text{ et } \left|\left\{\frac{\lambda' n}{p}\right\} - \gamma\right| \leq \delta_n.$$

Si le nombre n/p est dans l'ensemble $F_{1,n}(\lambda, \lambda')$, nous savons alors que

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta &\geq 2\left\{\frac{n}{p}\right\} + \left\{\frac{\lambda n}{p}\right\} - \delta_n > 1, \qquad 2\alpha < 1 \\ \text{et } \ 2\alpha + 2\beta + \gamma &\leq 2\left\{\frac{n}{p}\right\} + 2\left\{\frac{\lambda n}{p}\right\} + \left\{\frac{\lambda' n}{p}\right\} + 3\delta_n < 2. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} v_p = &-[\beta + \theta_1] - [2\alpha - \theta_1] - [\gamma + \theta_2] - [-\theta_2] \\ &+ [2\alpha + 2\beta + \gamma + \theta_1 + \theta_2] - [\theta_1 + \theta_2] \\ \geq &\ 1 - [2\alpha - \theta_1] - [-\theta_2] - [\theta_1 + \theta_2] \\ \geq &\ 1 \end{aligned}$$

puisque $2\alpha < 1$. De même, si n/p appartient à $F_{2,n}(\lambda, \lambda')$, nous avons

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta &\geq 2\left\{\frac{n}{p}\right\} + \left\{\frac{\lambda n}{p}\right\} - \delta_n > 2, \qquad 2\alpha > 1 \\ \text{et } \ 2\alpha + 2\beta + \gamma &\leq 2\left\{\frac{n}{p}\right\} + 2\left\{\frac{\lambda n}{p}\right\} + \left\{\frac{\lambda' n}{p}\right\} + 3\delta_n < 3. \end{aligned}$$

Donc, comme précédemment, nous obtenons la minoration

$$\begin{aligned} v_p = &-[\beta + \theta_1] - [2\alpha - \theta_1] - [\gamma + \theta_2] - [-\theta_2] \\ &+ [2\alpha + 2\beta + \gamma + \theta_1 + \theta_2] - [\theta_1 + \theta_2] \\ \geq &\ 2 - [2\alpha - \theta_1] - [-\theta_2] - [\theta_1 + \theta_2] \\ \geq &\ 1. \end{aligned}$$

Examinons le comportement asymptotique de $d_{\lambda,\lambda',n}$. Soit l un entier fixé arbitrairement grand et $I =]a, b[$ une composante connexe quelconque de $F_l(\lambda, \lambda')$. Nous aurons alors $I \subset F_n(\lambda, \lambda')$ pour tout entier $n \geq l$. Si $n \geq (2 + \lambda + \lambda')b^2$, tout nombre premier p de l'intervalle $J =]\frac{n}{b}, \frac{n}{a}[$ appartiendra à H_n puisque $p > \frac{n}{b} \geq \sqrt{(4 + 2\lambda + \lambda')n + 1}$ et $\frac{n}{p} \in]a, b[$. Nous montrons ensuite de la même façon que dans la preuve du Lemme 2.7 que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\log d_{\lambda,\lambda',n}}{n} \geq \int_{F_l(\lambda,\lambda')} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

En faisant tendre l vers l'infini, nous obtenons

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\log d_{\lambda,\lambda',n}}{n} \geq \int_{F(\lambda,\lambda')} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

La majoration

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log d_{\lambda,\lambda',n}}{n} \leq \int_{F(\lambda,\lambda')} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

s'obtient de manière similaire, en considérant l'ensemble

$$H_n = \left\{ p \text{ premiers tels que } p \geq \sqrt{(4+2\lambda+\lambda')n+1} \text{ et } \frac{n}{p} \in F(\lambda,\lambda') \right\}.$$

$\square$

Nous allons maintenant donner un algorithme de calcul de l'intégrale considérée dans le lemme ci-dessus.

2.3.3 Un algorithme de calcul de $f(\lambda, \lambda')$

Nous supposons maintenant que λ et λ' sont deux nombres rationnels b/a et c/a vérifiant les hypothèses du Lemme 2.16. Nous avons

$$F_1\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right) = \left\{ x>0, \{x\} < \frac{1}{2} \text{ et } 1 + \left\{\frac{b}{a}x\right\} \leq 2\{x\} + 2\left\{\frac{b}{a}x\right\} \leq 2 - \left\{\frac{c}{a}x\right\} \right\}.$$

et

$$F_2\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right) = \left\{ x>0,\ 2 + \left\{\frac{b}{a}x\right\} \leq 2\{x\} + 2\left\{\frac{b}{a}x\right\} \leq 3 - \left\{\frac{c}{a}x\right\} \right\}.$$

Les ensembles $F_1(\frac{b}{a},\frac{c}{a})$ et $F_2(\frac{b}{a},\frac{c}{a})$ étant disjoints, nous pouvons écrire

$$\int_{F(\frac{b}{a},\frac{c}{a})} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \underbrace{\int_{F_1(\frac{b}{a},\frac{c}{a})} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}}_{I_1} + \underbrace{\int_{F_2(\frac{b}{a},\frac{c}{a})} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}}_{I_2}$$

Calculons maintenant les intégrales I_1 et I_2. Pour cela, nous devons considérer les trois suites finies

$$\left(\frac{j}{a}\right)_{j\in\mathbb{N}} \cap [0,1], \left(\frac{k}{|b|}\right)_{k\in\mathbb{N}} \cap [0,1] \text{ et } \left(\frac{l}{c}\right)_{l\in\mathbb{N}} \cap [0,1]$$

dont nous rangeons les éléments dans un ordre croissant. Nous obtenons ainsi une suite croissante finie $\alpha = (\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}, 0\leq m\leq M(a,b,c)-1}$ de nombres réels telle que $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_{M(a,b,c)} = 1$. Nous pouvons donc écrire I_1 sous la forme

$$\int_{F_1(\frac{b}{a},\frac{c}{a})} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \sum_{q\in\mathbb{N}} \sum_{m=0}^{M(a,b,c)-1} \int_{F_1(\frac{b}{a},\frac{c}{a}) \cap]a(q+\alpha_m), a(q+\alpha_{m+1})[} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

Par les mêmes arguments que ceux invoqués dans la section 2.2.1.2, nous pouvons dire que $x \in F_1\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right)$ si et seulement si x vérifie les trois conditions

$$\begin{aligned} x &< \frac{1}{2} + [a\alpha_m] := x_1(m), \\ x &> \frac{1 + \inf([b\alpha_m], [b\alpha_{m+1}]) + 2[a\alpha_m]}{2 + \frac{b}{a}} := x_2(m), \\ x &< \frac{2 + 2[a\alpha_m] + 2\inf([b\alpha_m], [b\alpha_{m+1}]) + [c\alpha_m]}{2 + 2\frac{b}{a} + \frac{c}{a}} := x_3(m). \end{aligned}$$

Posons alors

$$y_{1,1}(m) = \max\left(\alpha_m, \frac{x_2(m)}{a}\right) \quad \text{et} \quad y_{1,2}(m) = \min\left(\frac{x_1(m)}{a}, \frac{x_3(m)}{a}, \alpha_{m+1}\right).$$

Il est clair, d'après ce que nous venons d'écrire et le fait que les fonctions considérées dans l'ensemble $F_1\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right)$ sont a-périodiques, que

$$F_1\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right) \cap]a(q+\alpha_m), a(q+\alpha_{m+1})[=]a(q+y_{1,1}(m)), a(q+y_{1,2}(m))[$$

pour tous $m, q \in \mathbb{N}^2, m \in \mathbb{N}, 0 \leq m \leq M(a,b,c) - 1$. Enfin, grâce à (2.12), nous obtenons

$$\sum_{q \in \mathbb{N}} \int_{F_1\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right) \cap]a(q+\alpha_m), a(q+\alpha_{m+1})[} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{1}{a}\big(\psi\left(y_{1,2}(m)\right) - \psi\left(y_{1,1}(m)\right)\big).$$

Le calcul de I_2 se déroule de la même façon. Soit $m \in \mathbb{N}, 0 \leq m \leq M(a,b,c) - 1$, nous avons les deux conditions

$$\begin{aligned} x &> \frac{2 + \inf([b\alpha_m], [b\alpha_{m+1}]) + 2[a\alpha_m]}{2 + \frac{b}{a}} := x_4(m), \\ x &< \frac{3 + 2[a\alpha_m] + 2\inf([b\alpha_m], [b\alpha_{m+1}]) + [c\alpha_m]}{2 + 2\frac{b}{a} + \frac{c}{a}} := x_5(m). \end{aligned}$$

Posons

$$y_{2,1}(m) = \max\left(\alpha_m, \frac{x_4(m)}{a}\right) \quad \text{et} \quad y_{2,2}(m) = \min\left(\frac{x_5(m)}{a}, \alpha_{m+1}\right)$$

et nous obtenons encore

$$\sum_{q \in \mathbb{N}} \int_{F_2\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right) \cap]a(q+\alpha_m), a(q+\alpha_{m+1})[} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{1}{a}\big(\psi\left(y_{2,2}(m)\right) - \psi\left(y_{2,1}(m)\right)\big).$$

Nous avons donc la formule de calcul de l'intégrale

$$f\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right) = \frac{1}{a} \sum_{m=0}^{M(a,b,c)-1} \big[\psi\left(y_{1,2}(m)\right) + \psi\left(y_{2,2}(m)\right) - \psi\left(y_{1,1}(m)\right) - \psi\left(y_{2,1}(m)\right)\big].$$

2.3.4 Calculs de mesures d'irrationalité de $\log 2$

Nous établissons maintenant les formules qui vont nous permettre de calculer une mesure d'irrationalité de $\log 2$. Notre outil sera la famille de polynômes

$$G_{a,b,c,s,t,n}(X) = \frac{1}{d_{\frac{b}{a},\frac{c}{a}}(an)} U_{an,bn,cn,s,t}(X) \in \mathbb{Z}_{2an}[X],$$

pour $n \in \mathbb{N}$, où a et c sont deux entiers naturels non nuls et b un entier relatif, tels que $2a > -\min(b, 2b+c)$. Dans cette sous-section, ces polynômes seront notés $G_n(X)$.

Nous avons

$$J_n = \int_0^1 \frac{G_n(x) - G_n(-1)}{1+x} \mathrm{d}x \in \frac{\mathbb{Z}}{d_{2an}}$$

et

$$\begin{aligned} J_n + G_n(-1)\log 2 &= \int_0^1 \frac{G_n(x)}{1+x}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 Q_n(x) G_n(x) \mathrm{d}x \\ &\quad + (-2)^{-(\beta+c)n} \int_0^1 \frac{(x(1-x))^{(\beta+c)n} G_n(x)}{1+x} \mathrm{d}x \end{aligned}$$

où $\beta = \max(0, b)$ et

$$Q_n(x) = \frac{1 - (-x(1-x)/2)^{(\beta+c)n}}{1+x} \in \frac{1}{2^{(\beta+c)n}} \mathbb{Z}_{2(\beta+c)n-1}[x].$$

En posant, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$q_n = 2^{(\beta+c)n} d_{2(a+\beta+c)n} G_n(-1)\,,$$

$$p_n = 2^{(\beta+c)n} d_{2(a+\beta+c)n} \int_0^1 Q_n(x) G_n(x) \mathrm{d}x - 2^{(\beta+c)n} d_{2(a+\beta+c)n} J_n$$

$$\text{et } \varepsilon_n = (-1)^{(\beta+c)n} d_{2(a+\beta+c)n} \int_0^1 \frac{(x(1-x))^{\beta n} G_n(x)}{1+x} \mathrm{d}x\,,$$

nous obtenons $\varepsilon_n = q_n \log 2 - p_n$, avec $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$.

Étudions le comportement asymptotique de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si nous désignons encore par C_r le cercle de centre -1 et de rayon r, nous savons par la formule de Cauchy que, pour tout $r > 0$,

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{d_{2(a+\beta+c)n} 2^{(\beta+c)n}}{d_{\frac{b}{a},\frac{c}{a}}(an)} \oint_{C_r} \frac{(z(1-z))^{(2a+b)n} (s-tz)^{cn}}{(z+1)^{(2a+2b+c)n+1}} \frac{\mathrm{d}z}{2i\pi} \\ &= \frac{d_{2(a+\beta+c)n} 2^{(\beta+c)n}}{d_{\frac{b}{a},\frac{c}{a}}(an)} \int_0^1 \frac{\left[\left(-1 + re^{2i\pi\theta}\right)\left(2 - re^{2i\pi\theta}\right)\right]^{(2a+b)n} \left(s + t - tre^{2i\pi\theta}\right)^{cn}}{\left(re^{2i\pi\theta}\right)^{(2a+2b+c)n}} \mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$|q_n| \leq \frac{d_{2(a+\beta+c)n} 2^{(\beta+c)n}}{d_{\frac{b}{a},\frac{c}{a}}(an)} r^{-(2a+2b+c)n} \left[(1+r)(2+r)\right]^{(2a+b)n} \left(|s+t|+|t|r\right)^{cn},$$

quelque soit $r > 0$. Nous en tirons

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log|q_n|}{n} &\leq 2a + (\beta+\gamma)(2+\log 2) - a\, e\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right) \\ &\quad + \min_{r>0} u_{a,b,c,s,t}(r) \\ &= \sigma_{a,b,c,s,t}(\log 2)\,.\end{aligned}$$

où $u_{a,b,c,s,t}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, -|s+t|/|t|\}$ par

$$u_{a,b,c,s,t}(r) = \log\left(\frac{|(1+r)(2+r)|^{2a+b}\,|(|s+t|+|t|r)|^{c}}{|r|^{2a+2b+c}}\right).$$

Le numérateur de sa dérivée est égal à

$$\begin{aligned}&2a|t|r^3 + (-3b|t| + (2a-c)|s+t|)r^2 \\ &\qquad - (4(a+b)|t| + 3(b+c)|s+t|)r - 2(2a+2b+c)|s+t|.\end{aligned}$$

Il reste à étudier le comportement de la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En intégrant $(2(a+b)+c)n$ fois par parties, nous trouvons

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= \frac{d_{2(a+\beta+c)n}}{d_{\frac{b}{a},\frac{c}{a}}(an)} \int_0^1 \frac{(x(1-x))^{(2a+b)n}(s-tx)^{cn}}{((2a+2b+c)n)!} \left(\frac{(x(x-1))^{(\beta+c)n}}{1+x}\right)^{((2(a+b)+c)n)} \mathrm{d}x \\ &= \frac{2^{(\beta+c)n} d_{2(a+\beta+c)n}}{d_{\frac{b}{a},\frac{c}{a}}(an)} \int_0^1 \frac{(x(1-x))^{(2a+b)n}(s-tx)^{cn}}{(1+x)^{(2(a+b)+c)n+1}} \mathrm{d}x\end{aligned}$$

puisque le polynôme $Q_n(x)$ est de degré $2(\beta+\gamma)n-1$ et que $2(\beta+\gamma) \leq 2(a+b)+c$ (rappelons que $2a > \min(0, b, 2b+c)$). Nous trouvons alors

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log|\varepsilon_n| &= 2a + \beta(2+\log 2) + c(2+\log 2) - ae\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right) \\ &\quad + \max_{0\leq x\leq 1} v_{a,b,c,s,t}(x) \\ &= -\tau_{a,b,c,s,t}(\log 2)\end{aligned}$$

où $v_{a,b,c,s,t}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1, s/t\}$par

$$v_{a,b,c,s,t}(x) = \log\left(\frac{|x(1-x)|^{2a+b}\,|s-tx|^{c}}{|1+x|^{2(a+b)+c}}\right).$$

Le numérateur de la dérivée de $v_{a,b,c,s,t}$ vaut

$$2atx^3+((4a+3b+c)t-(2a-c)s)x^2-((2a+b+c)t+(4a+3b+c)s)x+s(2a+b).$$

Nous cherchons à agir sur la composante analytique de $\tau_{a,b,c,s,t}(\log 2)$ à savoir le maximum de $v_{a,b,c,s,t}$ sur l'intervalle $[0,1]$. L'idée est d'écraser la fonction $v_{a,b,0,s,t}$ au point $x_0(a,b)$de l'intervalle $[0,1]$ où elle atteint son maximum. À cette fin, nous avons introduit des facteurs correcteurs $(s-tx)^c$ petits au voisinage du point $x_0(a,b)$. Les couples d'entiers (s,t) candidats naturels sont donc les réduites $(p_n/q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du nombre réel $x_0(a,b)$. Les gains analytiques sont alors nets pour certains couples (s,t) mais ils sont malheureusement très largement compensés par la perte dans l'asymptotique arithmétique, les polynômes utilisés ayant un contenu nettement plus faible. Pour illustrer ce phénomène, nous considérons la classe de polynômes $U_{3an,an,cn,s,t}(X)$ avec $a,c,n\in\mathbb{N}$ et $s,t\in\mathbb{Z}$. Lorsque $c=0$, nous retrouvons les polynômes $P_{6n,n,n}$ de la première partie qui permettaient d'établir une mesure d'irrationalité numériquement égale à $3,8913997....$ Sous ces conditions, nous savons que le point $x_0(3,1)$ vaut $\frac{\sqrt{393}-15}{12}=0.4020189....$ Les premières réduites de x_0 sont $(1,2),(2,5),(39,97),(80,199),(199,495),(478,1189)$ et elles vont constituer les couples (s,t) que nous allons considérer. Dans le tableau 2.2, nous regroupons des mesures d'irrationalité obtenues à l'aide des polynômes $U_{3an,an,cn,s,t}(X)$, l'indice des lignes étant le couple de réduites (s,t) et celui des colonnes c/a. Le tableau 2.3 qui est indexé de la même manière que le précédent contient les composantes analytiques de $\tau_{3a,a,c,s,t}(\log 2)$ correspondantes, à savoir les nombres réels $\max_{0\le x\le 1} v_{a,b,c,s,t}(x)/a$ tandis que le tableau 2.4 contient les valeurs $f(1/3,c/a)/a$ qui sont les composantes arithmétiques de $\tau_{3a,a,c,s,t}(\log 2)$.

c/a / (s,t)	1/10	1/100	1/1000	1/10000	1/100000
$(1,2)$	4.4945	3.9656	3.9008	3.8925	3.891536
$(2,5)$	4.5214	3.9556	3.8985	3.8922	3.891501
$(39,97)$	5.3634	4.0117	3.9037	3.8926	3.891534
$(80,199)$	5.6156	4.0258	3.9050	3.8928	3.891547
$(199,495)$	5.9720	4.0438	3.9067	3.8929	3.891563
$(478,1189)$	6.3601	4.0613	3.9083	3.8931	3.891756

Tableau 2.2. Valeurs de $\mu_{a,b,c,s,t}(\log 2)$.

c/a (s,t)	$1/10$	$1/100$	$1/1000$	$1/10000$	$1/100000$
$(1,2)$	-4.4030	-4.2465	-4.2291	-4.2273	-4.2271
$(2,5)$	-4.4152	-4.2582	-4.2316	-4.2278	-4.2272
$(39,97)$	-4.1157	-4.2276	-4.2283	-4.2273	-4.2271
$(80,199)$	-4.0439	-4.2204	-4.2276	-4.2273	-4.2271
$(199,495)$	-3.9527	-4.0158	-4.2267	-4.2272	-4.2271
$(478,1189)$	-3.8651	-4.2025	-4.2258	-4.2271	-4.2271

Tableau 2.3. Valeurs de la composante analytique de $\tau_{3a,a,c,s,t}(\log 2)$.

c/a	1	$1/10$	$1/100$	$1/1000$	$1/10000$	$1/100000$
$f\left(1/3,c/a\right)/a$	0.2043	0.3251	0.3739	0.3839	0.3855	0.3857

Tableau 2.4. Valeurs de la composante arithmétique de $\tau_{3a,a,c,s,t}(\log 2)$.

Bibliographie

[AlRob] K. Alladi et M. L. Robinson, *Legendre polynomials and irrationality*, J. reine angew. Math. **318** (1980), 137-155.

[Ap] R. Apéry, *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$*, Journées Arithmétiques de Luminy, Astérisque **61** (1979), 11–13.

[Ba] A. Baker, *Approximations to the logarithms of certain rational numbers*, Acta. Arith. **10** (1964), 376–383.

[Beu] F. Beukers, *A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$*, Bull. London Math. Soc. **11** (1979), 268–272.

[Chu1] G. V. Chudnovsky, *Hermite–Padé approximations to exponential functions and elementary estimates of the measure of irrationality of π*, Lecture Notes in Math. **925** (1982), 299–322.

[Chu2] D. V. Chudnovsky et G. V. Chudnovsky, *Padé and rational approximations to systems of functions and their arithmetic applications*, Lecture Notes in Math. **1052** (1982), 37–84.

[Chu3] G. V. Chudnovsky, *Number theoretic applications of polynomials with rational coefficients defined by extremaly conditions*, Arithmetic and Geometry, Birkäuser 1983, 61–105.

[Chu4] D. V. Chudnovsky et G. V. Chudnovsky, *Hypergeometric and modular function identities, and new rational approximations to and continued fraction expansions of classical constants and functions*, Marvin Knopp (ed.) et al., A tribute to Emil Grosswald: number theory and related analysis. American Mathematical Society, Contemp. Math. **143**, 117-162 1993.

[Da] V. Danilov, *Rational approximations of some functions at rational points*, Math. Zametki **24** 1978 n°4 et Math. Notes USSR **24** (1979), 741–744.

[Di] J. Dieudonné, Calcul infinitésimal, Hermann, Paris 1968.

[Dub1] A. K. Dubitskas, *Approximation of $\pi/\sqrt{3}$ by rational fractions (en russe)*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Math. Mekh., n°6 (1987), 73–76.

[Dub2] A. K. Dubitskas, *On improving the approximation of $\pi/\sqrt{3}$ by rational fractions (en russe)*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Math. Mekh., n°6 (1993), 76–77; traduction dans le Moscow Univ. Math. Bull. **48** n°6 (1993), 44–45.

[EllMF] W. Ellison et M. Mendès France, Les nombres premiers, Actualités scientifiques et industrielles, **1366**, Hermann, 1975.

[Er] A. Erdélyi et al., Higher transcendental functions, vol. 1, New York 1953.

[Hab] L. Habsieger, Introduction à l'approximation diophantienne, cours de 3ème cycle, Publications de l'école doctorale Mathématiques-Informatique de Bordeaux, 1996.

[Hat1] M. Hata, *Legendre type polynomials and irrationality measures*, J. reine angew. Math. **407** (1990), 99-125.

[Hat2] M. Hata, *Rational approximations to π and some other numbers*, Acta Arith. **63** (1993), n°4, 335-349.

[HMAV] A. Heimonen, T. Matala-Aho and Keijo Väänänen, *On irrationality measures of the values of Gauss hypergeometric function*, Manuscripta Math. **81** (1993), n°1-2, 183-202.

[HMAV2] A. Heimonen, T. Matala-Aho and Keijo Väänänen, *An application of Jacobi type polynomials to irrationality measures*, Bull. Austral. Math. Soc. **50** (1994), n°2, 225-243.

[Khi] A. Ya. Khinchin, *Continued fractions*, Chicago Univ. Press, 1964.

[Lag1] J.-L. Lagrange, *Additions au mémoire sur la résolution des équations numériques*, Oeuvres, Vol. II, Gauthiers-Villars, Paris, 1867.

[Lag2] J.-L. Lagrange, *Additions aux éléments d'algèbre d'Euler*, Oeuvres, Vol. VII, Gauthiers-Villars, Paris, 1867.

[Las] A. Lasjaunias, Communication personnelle.

[Liou1] J. Liouville, *Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A **18** (1844), 883-885.

[Liou2] J. Liouville, *Nouvelle démonstration d'un théorème sur les irrationnelles algébriques inséré dans le Compte Rendu de la dernière séance*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A **18** (1844), 910-911.

[Liou3] J. Liouville, *Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques*, J. Math. Pures Appl. **16** (1851), 133-142.

[Mah] K. Mahler, *On the approximation of logarithms of algebraic numbers*, Phil. Trans. Roy. Soc. London **A 245** (1953), 371–398.

[Pari] C. Batut, K. Belabas, D. Bernardi, H. Cohen, M. Olivier, *User's Guide to PARI-GP*, disponible par `ftp` anonyme depuis `ftp://megrez.math.u-bordeaux.fr/pub/pari`.

[Rh] G. Rhin, *Approximants de Padé et mesures effectives d'irrationalité*, Prog. in Math. **71** (1987), 155-164.

[RhVi] G. Rhin et C. Viola, *On a permutation group related to* $\zeta(2)$, Acta Arith. **77** n°1, (1996), 23–56.

[Ro] K. F. Roth, *Rational approximations to algebraic numbers*, Mathematika **2** (1955), 1–20; corrigendum, 168.

[Rud] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Masson, 1987.

[Ruk] E. A. Rukhadze, *A lower bound for the rational approximation of* $\ln 2$ *by rational numbers (en russe)*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Math. Mekh., n°6 (1987), 25–29.

Appendice A

Présentation des algorithmes d'Abramov et de Petkovšek

Nous donnons maintenant les justificatifs théoriques des algorithmes utilisés dans la section 4 du chapitre 1, à savoir l'algorithme de S.A. Abramov et l'algorithme Poly de M. Petkovšek. Pour un plus grand confort de lecture, nous expliquons à nouveau (mais avec plus de détails) ce que font les algorithmes et redonnons leurs énoncés.

A.1 L'algorithme d'Abramov

A.1.1 Objectif de l'algorithme

Soit K un corps de caractéristique 0, nous considérons l'équation d'inconnue $S \in K(z)$

$$P_M(z)S(z+M) + \ldots + P_0(z)S(z) = H(z) \tag{A.1}$$

avec $P_0, \ldots, P_M, H \in K[z]$. Il est utile de reformuler l'équation en termes d'opérateurs aux différences. Nous noterons N l'opérateur de décalage qui à toute fraction $S(z) \in K(z)$ associe la fraction $NS(z) = S(z+1)$. Soit L l'opérateur aux différences défini par

$$L = P_M N^M + \ldots + P_1 N + P_0, \tag{A.2}$$

l'équation (A.1) peut donc s'écrire $LS = b$.

L'algorithme de S.A. Abramov [Abr] permet de construire un polynôme D de $K[z]$ divisible par le dénominateur de toute solution rationnelle de l'équation (A.1). L'intérêt de cette construction est qu'elle nous permet de nous ramener à un cadre plus simple de résolution. En effet, une fois connu le polynôme D, nous posons $S = P/D$ où P est un polynôme à coefficients dans le corps K et injectons

S sous cette forme dans l'équation (A.1). Nous obtenons alors une équation à coefficients polynomiaux mais avec, à présent, une inconnue P qui est aussi un polynôme. Cette deuxième partie de la résolution est assurée par l'algorithme Poly.

A.1.2 Énoncé de l'algorithme

Nous donnons maintenant l'algorithme tel qu'il est énoncé dans [Abr]. Sa formulation est équivalente à celle donnée dans le chapitre 1. Nous l'utilisons ici car sa preuve est alors bien plus lisible mais les calculs de résultants et de p.g.c.d. de polynômes à coefficients complexes, tout à fait inadaptés à notre cadre d'étude nous ont obligé à écrire et utiliser l'algorithme sous la forme que l'on trouve dans le chapitre 1.

1. [Initialisation] $D(z) \leftarrow 1, A(z) \leftarrow P_M(z-M), B(z) \leftarrow P_0(z)$.
2. $R(m) \leftarrow$ résultant par rapport à z de $A(z)$ et $B(z+m)$.
3. Si $R(m)$ a une racine positive ou nulle alors
   $N \leftarrow$ la plus grande racine positive ou nulle de $R(m)$.
   Pour $i = 0, 1, ..., N$,
     $u(z) \leftarrow \text{p.g.c.d.}(A(z), B(z+i))$,
     $A(z) \leftarrow A(z)/u(z)$,
     $B(z) \leftarrow B(z)/u(z-i)$,
     $D(z) \leftarrow D(z)u(z)u(z-1)\cdots u(z-i)$.
4. [Sortie] D le dénominateur recherché.

A.1.3 Justification théorique de l'algorithme

Nous devons tout d'abord introduire quelques termes

Définitions A.1.
i) Nous dirons qu'un polynôme de $K(z)$ est spécial si sa factorisation sur K est de la forme

$$p^{\gamma_0}(z)p^{\gamma_1}(z+1)\dots p^{\gamma_h}(z+h) \tag{A.3}$$

où p est irréductible et $h, \gamma_0, \dots, \gamma_h \in \mathbb{N}$.
ii) Nous dirons que deux polynômes spéciaux sont reliés si leur produit est lui aussi spécial.

iii) Soit g un polynôme spécial de la forme (A.3), *nous dirons qu'un diviseur $p^{\sigma}(z+l)$ de $g(z)$ est critique de première espèce si la relation*

$$p^{\sigma_1}(z+l_1)|g(z) \tag{A.4}$$

implique $\sigma_1 < \sigma$ lorsque $l_1 > l$, et si elle entraîne $l_1 > l$ lorsque $\sigma_1 > \sigma$. Cela signifie qu'il est impossible d'augmenter σ sans diminuer l et d'augmenter l sans diminuer σ.

iv) Soit g un polynôme spécial de la forme (A.3), *nous dirons qu'un diviseur $p^{\sigma}(z+l)$ de $g(z)$ est critique de deuxième espèce si la relation* (A.4) *implique $\sigma_1 < \sigma$ lorsque $l_1 < l$ et si elle entraîne $l_1 > l$ lorsque $\sigma_1 > \sigma$. Cela veut dire qu'il est impossible d'augmenter σ sans augmenter l et de diminuer l sans diminuer σ.*

Soient $p^{\alpha_1}(z+M_1),\dots,p^{\alpha_s}(z+M_s)$ les diviseurs de g critiques de première espèce et $p^{\beta_1}(z+m_1),\dots,p^{\beta_t}(z+m_t)$ les diviseurs de g critiques de deuxième espèce. Quitte à renommer ces diviseurs, nous pouvons supposer $M_1 > \dots > M_s$ et $m_1 < \dots < m_t$. Nous déduisons des définitions précédentes que, nécessairement, $\alpha_1 < \dots < \alpha_s$ et $\beta_1 < \dots < \beta_t$. Enfin, nous posons $\alpha_0 = \beta_0 = 0$. Nous pouvons maintenant donner la dernière définition dont nous aurons besoin.

Définition A.2.

Soit $A, B \in K[z]$. Nous dirons qu'un polynôme spécial de la forme (A.3) *est borné par la paire (A, B) si*

$$p^{\alpha_i-\alpha_{i-1}}(z+M_i)|\,A(z), i=1,\dots,s, \tag{A.5}$$

$$p^{\beta_j-\beta_{j-1}}(z+m_j)|\,B(z), j=1,\dots,t. \tag{A.6}$$

Nous montrons maintenant un premier résultat.

Théorème 1 (S.A. Abramov, 1995) . *Soit S un élément de $K(z)$ dont le dénominateur est spécial. Si la fraction LS (où L est l'opérateur défini par la relation* (A.2)*) est un polynôme alors le dénominateur de S est borné par la paire $(P_M(z-M), P_0(z))$.*

Preuve. Le dénominateur de S est donc un polynôme g ayant la forme (A.3). Nous allons prouver que nous avons les relations (A.5). Écrivons $P_M(z-M)$ sous la forme

$$P_M(z-M) = p^{\delta_1}(z+M_1)\dots p^{\delta_s}(z+M_s)f(z)$$

où $\delta_1,\dots,\delta_s$ sont des entiers positifs ou nuls et f un polynôme qui n'est divisible par aucun des $p(z+M_i)$. Remarquons que nous pouvons décomposer S en éléments simples sous la forme de la somme d'un polynôme et de fractions du type

$$\frac{w(z)}{p^{\gamma}(z+l)} \text{ avec } \deg w(z) < \deg p^{\gamma}(z+l),$$

les valeurs de l étant deux à deux distinctes. Cette décomposition comprend des fractions ayant pour dénominateur

$$p^{\alpha_1}(z+M_1), \ldots, p^{\alpha_s}(z+M_s).$$

Nous appliquons maintenant l'opérateur L à chaque élément de la décomposition et nous regroupons les termes ayant même dénominateur. Nous obtenons ainsi la décomposition en éléments simples de $LS(z)$. Nous concluons en remarquant que s'il existe un entier $i_0, 1 \leq i_0 \leq s$, tel que $\alpha_{i_0} - \delta_{i_0} > \alpha_{i_0-1}$ alors la décomposition de $LS(z)$ comprend un élément ayant pour dénominateur $p^{\alpha_{i_0}-\alpha_{i_0-1}}(z+M_{i_0})$. Or, la fraction S satisfaisant l'équation (A.1), nous savons que LS est un polynôme de $K[z]$, d'où la contradiction. Nous prouvons de la même manière que les relations (A.6) sont vérifiées. □

Théorème 2 (S.A. Abramov, 1995) . *Soit g un polynôme borné par la paire (A, B), soit $R(m)$ le résultant par rapport à la variable z des polynômes $A(z)$ et $B(z+m)$. Supposons que $R(m)$ a des racines appartenant à $\mathbb{N}$ et appelons v la plus petite d'entre elles. Posons*

$$\begin{aligned} d(z) &= \text{p.g.c.d.}(A(z), B(z+v)), \\ c(z) &= d(z)d(z-1)\cdots d(z-v), \\ \tilde{g}(z) &= g(z)/\text{p.g.c.d.}(g(z), c(z)), \\ \tilde{A}(z) &= A(z)/d(z), \\ \tilde{B}(z) &= B(z)/d(z-v). \end{aligned}$$

Alors $\tilde{g}(z)$ est borné par $(\tilde{A}(z), \tilde{B}(z))$ et $g(z)|c(z)\tilde{g}(z)$.

Preuve. Nous remarquons que les diviseurs critiques de $\tilde{g}(z)$ sont aussi des diviseurs critiques de $g(z)$. Si $g(z)$ est changé en $\tilde{g}(z)$ alors les différences

$$\alpha_i - \alpha_{i-1}, i = 0, \ldots, s \text{ et } \beta_j - \beta_{j-1}, j = 0, \ldots, t,$$

sont transformées sans augmenter. La différence entre $A(z)$ et $\tilde{A}(z)$ et celle entre $B(z)$ et $\tilde{B}(z)$ respectivement, soit ne concerne pas les facteurs

$$p(z+M_i), i = 1, \ldots, s, p(z+m_j), j = 1, \ldots, t$$

soit ne concerne que les exposants de $p(z+M_s), p(z+m_t)$ (ou même seulement l'un des deux). Mais dans le dernier cas, les exposants de $p(z+M_s), p(z+m_t)$ dans $g(z)$ subissent le même changement que les exposants dans $A(z)$ et $B(z)$. Enfin, notons que si $R(m)$ n'a pas racine dans $\mathbb{N}$, alors 1 est le seul polynôme borné par $(A(z), B(z))$.

La deuxième partie de la conclusion est évidente. □

Le dernier théorème montre que l'algorithme nous permet de calculer un polynôme D divisible par tout polynôme spécial borné par la paire (A, B). Toute fraction rationnelle S qui n'est pas un polynôme peut s'écrire sous la forme $S_1 + \cdots + S_k$ où $S_1, \ldots, S_k$ sont des fractions rationnelles ayant pour dénominateurs des polynômes spéciaux non reliés. Le produit de ces dénominateurs est le dénominateur de S. Soit L l'opérateur défini par (A.2), soit $i, 1 \leq i \leq k$, la fraction LS_i est soit un polynôme, soit la somme d'un polynôme et d'une fraction dont le dénominateur est spécial et relié au dénominateur de S_i. Nous en déduisons que si S est est solution de l'équation (A.1), chaque fraction S_i, pour $i = 1, \cdots, k$, a son dénominateur borné par la paire $(P_M(z-M), P_0(z))$. Nous obtenons ainsi le "dénominateur universel" désiré en utilisant $A(z) = P_M(z-M)$ et $B(z) = P_0(z)$.

Remarque A.3. Nous avons supposé seulement que K est de caractéristique nulle. Cela dit, nous avons besoin de savoir trouver des racines entières de polynômes à coefficients dans K. Si nous voulons être assurés de mener des calculs exacts, il faut donc qu'il existe un algorithme pour trouver des racines entières d'équations algébriques sur K. Si nous disposons d'un tel corps K, il est clair que toute extension algébrique ou transcendante $K(e)$ sera elle aussi convenable.

A.2 L'algorithme Poly

A.2.1 Objectif de l'algorithme

Soit F un corps de caractéristique nulle et K une extension de F. Poly permet d'obtenir toutes les solutions polynomiales $T \in K[z]$ de l'équation

$$\sum_{0 \leq m \leq M} P_m(z) T(z+m) = H(z) \tag{A.7}$$

où $P_0, \ldots, P_M, H \in F[z]$. Soit P un polynôme à coefficients dans F, nous noterons $\mathrm{cd}(P)$ son coefficient dominant et la notation $z^{\underline{j}}$ désignera le produit $z(z-1)\ldots(z-j+1)$.

A.2.2 Énoncé de l'algorithme

1. Pour $j = 0, ..., M$, $Q_j \leftarrow \sum_{m=j}^{M} \binom{m}{j} P_m$.
2. $e \leftarrow \max_{0 \leq j \leq M} (\deg Q_j - j)$

$$\alpha(z) \leftarrow \sum_{\substack{0\le j\le M\\ \deg Q_j - j = e}} \mathrm{cd}(Q_j) z^{\underline{j}}$$

$$d_1 \leftarrow \max\{z \in \mathbb{N}, \alpha(z) = 0\}$$
$$d \leftarrow \max\{\deg H - e, -e-1, d_1\}$$

3. Injecter $P(z) = \sum_{i=0}^{d} a_i z^i$ dans l'équation (A.7).
   Résoudre le système linéaire en les a_i.

4. [Sortie] Une famille génératrice de l'ensemble des solutions.

A.2.3 Justification théorique de l'algorithme

La première étape consiste à trouver une borne d pour le degré des solutions. Nous réécrivons l'opérateur L à l'aide de l'opérateur aux différences $\Delta = N - 1$ où N est l'opérateur de décalage présenté dans la section précédente. Nous avons donc

$$L = \sum_{m=0}^{M} P_m(z) N^m = \sum_{m=0}^{M} P_m(z)(\Delta+1)^m = \sum_{m=0}^{M} P_m(z) \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \Delta^j = \sum_{j=0}^{M} Q_j(z)\Delta^j$$

avec $Q_j = \sum_{m=j}^{M} \binom{m}{j} P_m$. Soit $T(z) = \sum_{k=0}^{d} a_k z^k \in K[z]$ tel que $a_d \neq 0$. Comme nous avons

$$\Delta^j z^k = k^{\underline{j}} z^{k-j} + O(z^{k-j-1}),$$

le coefficient dominant de $Q_j(z)\Delta^j T(z)$ est égal à $\mathrm{cd}(Q_j) a_d d^{\underline{j}}$. Posons

$$e = \max_{0\le j\le M} (\deg Q_j - j). \tag{A.8}$$

Nous avons clairement l'inégalité $\deg LT(z) \le d+e$. Si $d+e < 0$ alors $d \le -e-1$ est la borne désirée (remarquons que e peut-être négatif). Dans le cas contraire, le coefficient de z^{d+e} dans $LT(z)$ vaut

$$a_d \sum_{\substack{0\le j\le M\\ \deg Q_j - j = e}} \mathrm{cd}(Q_j) d^{\underline{j}}.$$

Nous distinguons maintenant deux cas. Soit $\deg LT(z) = d+e$, nous avons alors $d + e = \deg H(z)$. Soit $\deg LT(z) < d+e$, ce qui implique que le coefficient de z^{d+e} dans $LT(z)$ s'annule. Cela signifie que d est une racine du polynôme

$$\alpha(z) = \sum_{\substack{0\le j\le M\\ \deg Q_j - j = e}} \mathrm{cd}(Q_j) z^{\underline{j}} \tag{A.9}$$

Si nous posons

$$d_1 = max\{z \in \mathbb{N}, \alpha(z) = 0\},$$

nous voyons donc que le degré de n'importe quel polynôme T solution de (A.7) est borné par

$$d = max\{\deg H - e, -e - 1, d_1\}.$$

Une fois cette borne d obtenue, il est facile de trouver les coefficients des solutions polynomiales de (A.7). Nous utilisons pour cela la méthode des coefficients indéterminés. Nous injectons T écrit sous la forme $\sum_{k=0}^{d} a_k z^k$ dans l'équation (A.7). Nous regroupons les coefficients de mêmes puissances de z. Cela nous permet de former un système linéaire d'équations algébriques en les $d+1$ inconnues $a_0, \ldots, a_d$ qu'il ne reste plus quà résoudre.

Remarque A.4. Tout comme pour l'algorithme d'Abramov, si nous voulons être assurés de mener des calculs exacts, il faut qu'il existe un algorithme pour trouver des racines entières d'équations algébriques sur K. Nous pouvons alors aussi travailler sur toute extension algébrique ou transcendante $K(e)$.

Remarque A.5. Il existe un algorithme plus sophistiqué décrit dans [ABP] qui mène à la résolution d'un système linéaire à M inconnues. Cettte méthode est beaucoup plus efficace que Poly lorsque le degré des polynômes solutions est grand (comme c'est souvent le cas) par rapport à l'ordre M de l'équation aux différences finies.

A.3 Un exemple

Afin de manipuler les deux algorithmes, nous nous proposons de traiter un exemple simple proposé dans [Abr]. Il s'agit de trouver les solutions S appartenant à $\mathbb{Q}(z)$ de l'équation

$$\begin{aligned}(2z^3 + 13z^2 + 22z + 8)S(z+3) - (2z^3 + 11z^2 + 18z + 9)S(z+2) \\ + (2z^3 + z^2 - 6z)S(z+1) - (2z^3 - z^2 - 2z + 1)S(z) = 0\end{aligned} \tag{A.10}$$

Nous utilisons d'abord l'algorithme d'Abramov pour trouver un dénominateur $D \in \mathbb{Q}[z]$ commun à toutes les solutions rationnelles de (A.10). Nous avons

$$\begin{aligned}A(z) &= 2(z-3)^3 + 13(z-3)^2 + 22(z-3) + 8 \\ &= (z-1)(z+1)(2z-5) \\ B(z) &= -(z-1)(z+1)(2z-1)\end{aligned}$$

Le calcul de $R(m) = \text{Rés}_z(A(z), B(z+m))$ donne

$$R(m) := -4m^2(m-2)(2m+7)(2m+3)(2m+1)(2m-3)(m+2)^2.$$

Nous obtenons donc $N = 2$. Nous entamons la boucle qui permet de déterminer le dénominateur D. Pour $i = 0$, nous obtenons $u(z) = z^2 - 1$ et pour $i = 1, 2$, nous obtenons $u(z) = 1$. Nous avons donc trouvé que $D(z) = z^2 - 1$. Nous remplaçons donc $S(z)$ par $T(z)/z^2 - 1$, où $P \in \mathbb{Q}(z)$ dans l'équation (A.10). Nous allons donc nous servir de Poly pour résoudre l'équation

(A.11)
$$(2z+1)T(z+3) - (2z+3)T(z+2) + (2z-3)T(z+1) - (2z-1)T(z) = 0.$$

Nous obtenons

$$Q_0(z) = -4,\ Q_1(z) = 2(2z-3),\ Q_2(z) = 4z,\ Q_3(z) = 2z+1.$$

Nous en déduisons que $e = \max_{0 \le j \le M}(\deg Q_j - j) = 0$. Le polynôme $\alpha(z)$ vaut donc

$$\alpha(z) = \sum_{\substack{0 \le j \le M \\ \deg Q_j - j = e}} \mathrm{cd}(Q_j) z^{\underline{j}} = 4z - 4.$$

Soit d_1 le maximum de ses racines appartenant à $\mathbb{N}$, nous avons immédiatement $d_1 = 1$. Finalement, la borne d des degrés des polynômes solutions est égale à

$$d = \max\{\deg H - e, -e - 1, d_1\} = 1.$$

Il ne reste plus qu'à injecter $T(z)$ dans (A.11) sous la forme $a_1 z + a_0$. Nous obtenons alors une seule équation $3a_1 + 2a_0 = 0$ qui a pour solutions $(a_1, a_0) = \lambda(2, -3)$ avec $\lambda \in \mathbb{Q}$. La forme générale de la fraction rationnelle solution de l'équation (A.10) est

$$S(z) = \lambda \frac{2z-3}{z^2-1}, \quad \lambda \in \mathbb{Q}.$$

Bibliographie

[Abr] S.A. Abramov, *Rational solutions of linear difference and q-difference equations with polynomial coefficients*, Proc. ISSAC '95, T. Levelt ed., ACM Press, New-York (1995), 285-289.

[ABP] S.A. Abramov, M. Bronstein, M. Petkovšek, *On polynomial solutions of linear operator equations*, Proc. ISSAC '95, T. Levelt ed., ACM Press, New-York (1995), 290-296.

[PWZ] M. Petkovšek, H. S. Wilf, D. Zeilberger, *A=B*, A.K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 1996.

Appendice B

Le module Pasrec

Pasrec est le nom d'un module écrit en Maple. Il s'agit d'un ensemble de procédures dont l'objectif est de donner des fonctions entières candidates pour satisfaire les systèmes d'équations que nous avons considéré dans le chapitre 1. Pour l'utiliser, lancez votre session maple (maple ou xmaple) et entrez la commande : "`read(Pasrec):`".

B.1 Cas des deux équations aux différences

Nous cherchons la forme explicite des solutions entières f du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{0\leq m\leq M} P_m(z)f(z+m\alpha)=0, \\ \sum_{0\leq n\leq N} Q_n(z)f(z+n\beta)=0, \end{array} \right. \tag{B.1}$$

où $(P_m)_{0\leq m\leq M}$ et $(Q_n)_{0\leq n\leq N}$ sont des suites finies de $\mathbb{C}[z]$ et α et β tels que $\alpha/\beta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. La procédure `pasrec` a pour objet la détermination d'une telle forme.

Entrez la commande "`pasrec():`". Il vous sera alors demandé d'entrer le membre de gauche de la première équation, l'ordre de cette équation (M ici), puis un pas récurrent (α ici) associé à cette équation. De même, il vous sera demandé d'entrer le membre de gauche de la deuxième équation, l'ordre de cette équation (N ici), puis un pas récurrent (β ici) associé à cette équation. Vous devrez enfin donner l'expression de la fonction inconnue (ici, $f(z)$) puis entrer une précision qui sera utilisée dans les calculs. **Attention!** Vous devez ajouter ";" ou ":" à toutes les réponses que vous donnez au programme. En cas d'oubli, le programme vous reposera la même question à laquelle il faudra répondre seulement par ";" ou ":" (ne répétez pas votre réponse). Le programme vous donne en réponse une fonction entière candidate. Vous pouvez alors lancer à nouveau le programme en demandant une precision plus fine (i.e. en entrant une constante de précision plus petite) afin de voir si la solution reste inchangée ou s'il y a des termes qui s'ajoutent ou qui disparaissent.

Nous donnons maintenant un exemple de fonctionnement de la procédure `pasrec` sous xmaple.

```
>read(Pasrec):
```

```
>pasrec();
```

```
>Entrez le membre de gauche de votre premiere equation :
((E-1)*z-1)*f(z+2)+((1-E^2))*z+2)*f(z+1)+E*((E-1)*z+E-2)*f(z);
```

```
>Entrez l'ordre de cette equation : 2;
```

```
>Entrez un pas recurrent associe a cette equation : 1;
```

```
>Entrez le membre de gauche de votre deuxieme equation :
((E^I-1)*z-1)*f(z+2)+((1-E^(2*I)))*z+2)*f(z+1)
+(E^I)*((E^I-1)*z+E^I-2)*f(z);
```

```
>Entrez l'ordre de cette equation : 2;
```

```
>Entrez un pas recurrent associe a cette equation : I;
```

```
>Entrez l'inconnue : f(z);
```

```
>Entrez la precision souhaitee : 10^(-50);
```

On cherche donc les solutions entieres f du système

$$((E-1)-1)f(z+2)+((1-E^2))z+2)f(z+1) \\ +E((E-1)z+E-2)f(z)=0$$

$$((E^I-1)z-1)f(z+2I)+((1-E^{2I}))z+2)f(z+I) \\ +E^I((E^I-1)z+E^I-2)f(z)=0$$

Toute solution entiere est une combinaison lineaire sur C des fonctions

$$E^z, \quad z$$

Temps CPU, 4.917

```
>Voulez vous refaire le calcul avec une precision differente
(o;/n;)? n;
```

Au revoir!

B.2 Cas où l'une des deux équations est une équation différentielle

L'objectif de la procédure `pasrecd` est de nous donner la forme explicite des solutions entières f du système

$$\text{(B.2)} \qquad \begin{cases} \sum_{0\le m\le M} P_m(z)f(z+m\alpha)=0, \\ \sum_{0\le n\le N} Q_n(z)f^{(n)}(z)=0, \end{cases}$$

où $(P_m)_{0\le m\le M}$ et $(Q_n)_{0\le n\le N}$ sont des suites finies de $\mathbb{C}[z]$ et α un nombre complexe non nul.

Entrez la commande "`pasrecd():`". Il vous sera alors demandé d'entrer le membre de gauche de l'équation aux différences, l'ordre de cette équation (M ici), puis un pas récurrent (α ici) associé à cette équation. De même, il vous sera demandé d'entrer le membre de gauche de l'équation différentielle et l'ordre de cette équation (N ici). La machine vous demandera enfin de donner l'expression de la fonction inconnue (ici, $f(z)$) puis d'entrer une précision qui sera utilisée dans les calculs. **Attention!** Vous devez ajouter ";" ou ":" à toutes les réponses que vous donnez au programme. En cas d'oubli, le programme vous reposera la même question à laquelle il faudra répondre par ";" ou ":". Le programme vous donne en réponse une fonction entière candidate. Là encore, vous pouvez alors lancer à nouveau le programme en demandant une precision plus fine afin de voir si la solution reste inchangée ou s'il y a des termes qui s'ajoutent ou qui disparaissent.

Nous donnons maintenant un exemple de fonctionnement de la procédure `pasrecd` sous xmaple.

```
>read(Pasrec):
```

```
>pasrecd();
```

```
>Entrez le membre de gauche de votre premiere equation :
(z+2)*f(z+2)+((1+E))*z+1)*f(z+1)+E*z*f(z);
```

```
>Entrez l'ordre de cette equation : 2;
```

```
>Entrez un pas recurrent associe a cette equation : 1;
```

```
>Entrez le membre de gauche de votre deuxieme equation :
z*D[2](f(z))+(2-z)*D[1](f(z))-f(z);
```

```
>Entrez l'ordre de cette equation : 2;
```

```
>Entrez un pas recurrent associe a cette equation : I;
```

```
>Entrez l'inconnue : f(z);
```

```
>Entrez la precision souhaitee : 10^(-10);
```

On cherche donc les solutions entieres f du système

$$(z+2)f(z+2) - (1+E)(z+1)f(z+1) + Ezf(z) = 0$$

$$zD[2](f(z)) + (2-z)D[1](f(z)) - f(z) = 0$$

Toute solution entiere est un multiple complexe de la fonction

$$(1.0000000000E^z - 1.0000000000)/z$$

Temps CPU, 5.683

```
>Voulez vous refaire le calcul avec une precision differente
(o;/n;)? n;
```

Au revoir!

B.3 Télécharger le module Pasrec

Pasrec est disponible sur le World Wide Web. Il peut être téléchargé depuis une page web dont l'U.R.L. est
`http://www.math.u-bordeaux.fr/~brisebar/Pasrec/pasrec.html` .